Test Introductif (Mathématique Élémentaire)

Test n° 1 (19 septembre 2005) **Correction**

Question 1. *Classez les nombres suivants par ordre croissant :*

$$0{,}222\ldots \qquad \sqrt{2} \qquad 1 \qquad 3{,}5 \qquad 0{,}21 \qquad \sqrt{3} \qquad 2 \qquad 3{,}545.$$

$$\boxed{0{,}21} < \boxed{0{,}222\ldots} < \boxed{1} < \boxed{\sqrt{2}} < \boxed{\sqrt{3}} < \boxed{2} < \boxed{3{,}5} < \boxed{3{,}545}$$

Question 2. *Soit a et b deux nombres réels. Complétez la formule suivante de manière à ce que l'égalité soit vraie.*

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} : \boxed{a \leqslant x \text{ et } x \leqslant b}\right\}$$

Complétez la formule suivante de manière à ce que l'équivalence soit vraie.

$$x \in [a,b] \Leftrightarrow \boxed{a \leqslant x \text{ et } x \leqslant b}$$

Question 3.

(a) *Y a-t-il un plus grand nombre dans l'intervalle* $[1,3]$ *?*

- *Oui, c'est* $\boxed{3}$ *, parce que :*

  quel que soit $x \in [1,3]$, $3 \geq x$.
- ~~*Non, parce que :*~~

(b) *Y a-t-il un plus grand nombre dans l'intervalle* $[1,3[$ *?*

- ~~*Oui, c'est* ____ *, parce que :*~~
- *Non, parce que :*

  quel que soit $x \in [1,3[$, on peut toujours trouver $x' \in [1,3[$ tel que $x' > x$ — par exemple, $x' = \frac{1}{2}(x+3)$. Aucun $x \in [1,3[$ n'est donc plus grand que tous les autres.

Question 4.

(a) *Donnez une définition de la notion de nombre rationnel.*

Un nombre est dit rationnel s'il peut s'écrire comme quotient de deux entiers (le dénominateur ne pouvant être bien sûr nul). Symboliquement

$$x \text{ est rationnel} \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \text{ et } x = p/q$$

(b) *Donnez un exemple de nombre rationnel et justifiez que c'en est bien un à partir de la définition que vous avez donnée en (a).*

Tous les entiers n (..., -2, -1, 0, 1, 2,...) sont des nombres rationnels car ils peuvent s'écrire comme $n/1$. Bien entendu, il existe des nombres rationnels non entiers comme, par exemple, $0{,}5 = 1/2$.

(c) *Donnez un nombre rationnel qui appartient à l'intervalle* $[\sqrt{6}, \sqrt{11}]$.

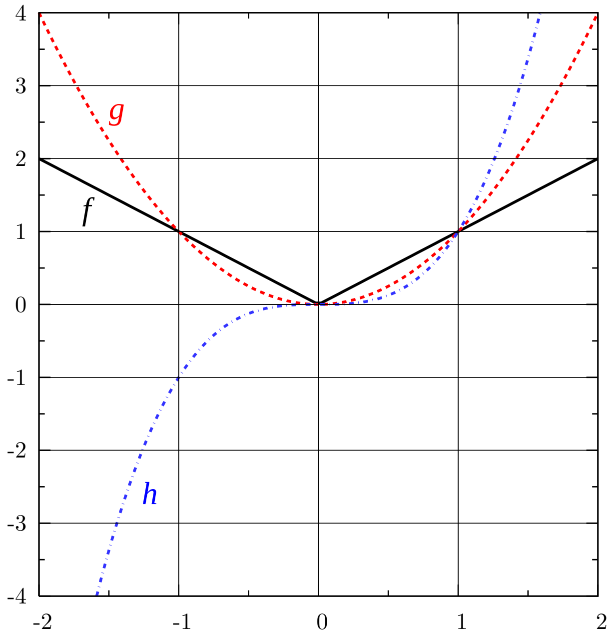
Le nombre entier (donc rationnel) 3 est bien dans cet intervalle. En effet pour vérifier que $\sqrt{6} \leqslant 3 \leqslant \sqrt{11}$, il suffit[1] de voir que $6 \leqslant 3^2 \leqslant 11$ ce qui est vrai.

Question 5.

Tracez sur le graphique ci-contre les graphes des trois fonctions suivantes :

$$f(x) = |x|$$
$$g(x) = x^2$$
$$h(x) = x^3$$

Veillez à ce que la position des graphes les uns par rapport aux autres soit correcte.



Question 6.

(a) *Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Définissez « f est continue en un point $a \in D$ ».*

$$f \text{ est continue en } a \in D \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = f(a)$$

[1] Élever au carré donne des inégalités équivalentes car tous les termes sont positifs.

(b) *Donnez un exemple de fonction continue.*

Toutes les fonctions constantes $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$, pour un $c \in \mathbb{R}$ fixé, sont continues. De manière plus générale, toutes les fonctions polynomiales ainsi que les fonctions élémentaires que vous avez vues (sin, cos, tg, e^x, arcsin, arccos, arctg, ln) sont des fonctions continues.

(c) *Donnez un exemple de fonction qui n'est pas continue en* 0.

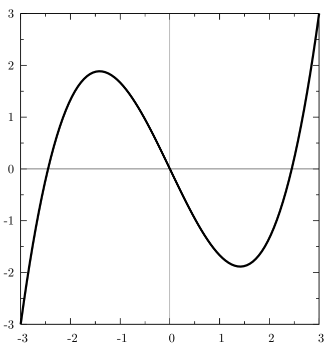
La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

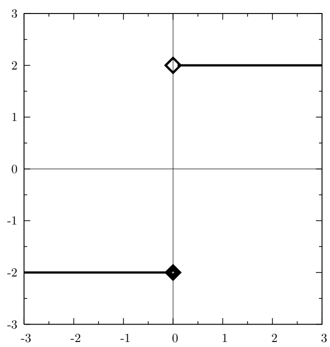
est discontinue (en 0). (Notez que pour parler de la continuité ou de la discontinuité d'une fonction f en un point a, il faut que a appartienne au domaine de f).

(d) *Classez les graphes ci-dessous dans le tableau selon qu'ils représentent une fonction continue ou non (en mentionnant la lettre désignant la fonction).*

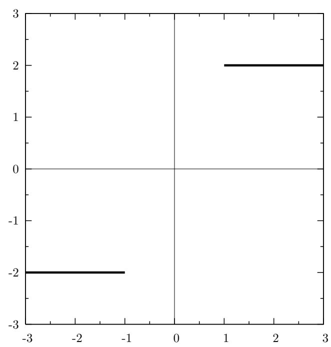
Fonctions continues	*Fonctions discontinues*
g, i, j	h, k



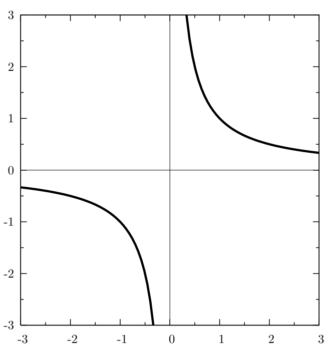
$g : [-3,3] \to \mathbb{R}$



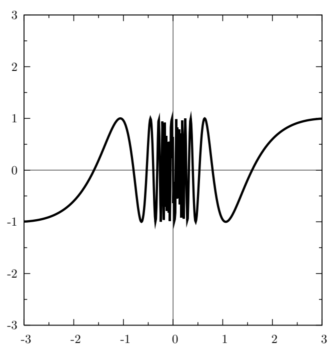
$h : [-3,3] \to \mathbb{R}$



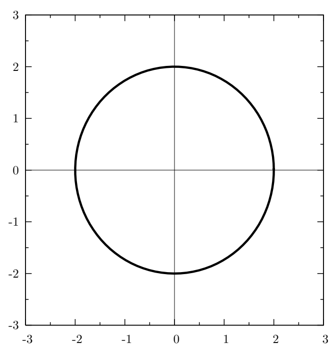
$i : [-3,-1] \cup [1,3] \to \mathbb{R}$



$j : [-3,3] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$



$k : [-3,3] \to \mathbb{R}$



$\ell : [-2,2] \to \mathbb{R}$

REMARQUES : Le graphe de ℓ n'est pas celui d'une fonction (car, par exemple pour $x = 0$, il donne deux images possibles 2 et -2). C'est pourquoi il n'est pas repris dans le tableau ci-dessus.

Par ailleurs, on peut imaginer que k est continue si on pense que les oscillations s'amenuisent près de 0. Néanmoins, la vision d'un tel graphe devrait faire fortement *suspecter* qu'il est la représentation expérimentale imparfaite d'une fonction discontinue (ici, k est en réalité défini par $k(x) = \sin(5/x)$ si $x \neq 0$ et $k(0) = 0$).

Question 7. *Dans le plan muni du repère orthogonal X-Y, on considère les droites D et D' d'équations :*

$$D \equiv ax + by + c = 0 \qquad D' \equiv a'x + b'y + c' = 0$$

(a) *Donnez des conditions sur a, b, c, a', b', c' pour que D et D' soient parallèles.*

(b) *Donnez des conditions sur a, b, c, a', b', c' pour que D et D' soient perpendiculaires.*

La réponse à cette question dépend fortement de vos connaissances sur les équations de droites. Si les vôtres sont suffisamment développées,[2] il est possible de répondre plus rapidement.

Pour commencer, il faut noter que pour que les équations de D (resp. D') soient celles de droites, a et b (resp. a' et b') ne peuvent être tous les deux nuls.[3] Rappelons que, si $b = 0$, alors la droite D est verticale tandis que, si $b \neq 0$, la droite D n'est pas verticale et peut (aussi) être définie par l'équation $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Dans ce dernier cas, $-\frac{a}{b}$ est la pente de D. Cette discussion s'applique également à D'.

(a) Nous affirmons que D et D' sont sont parallèles si et seulement si

$$ab' - a'b = 0. \tag{1}$$

Pour le montrer, on distingue deux cas.

- Si $b = 0$ alors D est verticale et la seule manière pour D' d'être parallèle à D est d'être également verticale, c'est-à-dire que $b' = 0$ et donc (1) est satisfait. Réciproquement, si (1) est satisfait et $b = 0$, alors (1) devient $ab' = 0$ ou encore $b' = 0$ (car $a \neq 0$ par la remarque préliminaire). Le parallélisme de D et D' et l'équation (1) sont donc bien équivalents.
- Si $b \neq 0$, alors $D \equiv y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$. Pour que D' puisse lui être parallèle, il faut qu'elle soit aussi non verticale — c'est-à-dire que $b' \neq 0$ — auquel cas elle peut être définie par l'équation $y = -\dfrac{a'}{b'}x - \dfrac{c'}{b'}$. D et D' sont parallèles si et seulement si leurs pentes sont égales, c'est-à-dire si et seulement si $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$ ce qui revient à (1). Dans ce cas-ci, on a donc aussi l'équivalence[4] du parallélisme de D et D' avec l'équation (1).

[2]Malheureusement l'expérience montre que c'est rare. C'est pourquoi la réponse donnée ici essaye d'être élémentaire tout en ne passant pas sous silence les points plus délicats (spécifiquement le fait qu'il faut des hypothèses pour pouvoir parler de la pente).

[3]Si $a = b = 0$, l'équation devient $c = 0$ et son ensemble de solutions consiste en tous les points du plan (si $c = 0$) ou l'ensemble vide (si $c \neq 0$).

[4]Pour être tout à fait pointilleux, dans le deuxième cas, on a utilisé la parallélisme de D et D' comme hypothèse pour établir $b \neq 0 \Rightarrow b' \neq 0$. Or ceci n'est pas acceptable pour l'implication $(1) \Rightarrow D \parallel D'$. Dans ce cas, on peut suivre le raisonnement par l'absurde suivant : si $b' = 0$ (bien que $b \neq 0$), (1) devient $-a'b = 0$ et donc $a' = 0$ ce qui impossible au vu de la remarque préliminaire.

(b) Nous allons montrer que la perpendicularité de D et D' équivaut à

$$aa' + bb' = 0 \tag{2}$$

Nous allons, comme ci-dessus, envisager deux cas.

- Si $b = 0$, la droite D est verticale. Dans ce cas, D' est perpendiculaire à D si et seulement si D' est horizontale, c'est-à-dire si et seulement si $a' = 0$. Par ailleurs, sous l'hypothèse $b = 0$, (2) devient $aa' = 0$ ou encore $a' = 0$ (au vu, une fois de plus, de la remarque préliminaire). Donc $D \perp D' \Leftrightarrow$ (2) lorsque $b = 0$.
- Si $b \neq 0$, $D \equiv y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.
  - Si $a = 0$, D est horizontale. Pour être orthogonale à D, D' doit être verticale c'est-à-dire $b' = 0$. Ceci est bien équivalent à (2) car, sous les hypothèses $b \neq 0$ et $a = 0$, (2) devient $bb' = 0$ ou encore $b' = 0$.
  - Si $a \neq 0$, D n'est pas horizontale et donc, pour être orthogonale, D' ne peut être verticale, i.e. $b' \neq 0$. Par conséquent, une équation équivalente pour D' est $y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$. La perpendicularité de D et D' se traduit par le fait que[5] le produit de leurs coefficients angulaires vaut -1, en l'occurrence $(-\frac{a}{b})(-\frac{a'}{b'}) = -1$ ce qui équivaut[6] à (2).

Question 8. *Pour x, y des nombres entiers, on définit la relation $x \lhd y$ par*

$$x \lhd y \quad \Leftrightarrow \quad \textit{il existe un } k \in \mathbb{N} \textit{ tel que } x + k = y \tag{3}$$

En utilisant cette définition, prouvez que, quels que soient les entiers x, y, z, on a

(a) $x \lhd x$

(b) si $x \lhd y$ et $y \lhd x$, alors $x = y$

(c) si $x \lhd y$ et $y \lhd z$, alors $x \lhd z$

Veillez à la qualité de votre rédaction.

(a) Pour voir $x \lhd x$, il faut et il suffit de prouver qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $x + k = x$. C'est bien le cas pour $k = 0$.

(b) Par l'hypothèse « $x \lhd y$ et $y \lhd x$ », on sait qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ et $k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $x + k_1 = y$ et $y + k_2 = x$. On en déduit que $x + k_1 + k_2 = x$ ou encore que $k_1 + k_2 = 0$. Comme $k_1 \geq 0$ et $k_2 \geq 0$, cela implique que $k_1 = k_2 = 0$. Par conséquent $y = x + k_1 = x$ comme voulu.

(c) Par les hypothèses « $x \lhd y$ » et « $y \lhd z$ », on sait qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ et $k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $x + k_1 = y$ et $y + k_2 = z$. Il faut voir qu'il existe un $k_3 \in \mathbb{N}$ tel que $x + k_3 = z$. Or, en combinant les deux hypothèses, on a que $x + k_1 + k_2 = z$. Il suffit donc de prendre $k_3 = k_1 + k_2$ pour établir la thèse.

[5] On redémontrera ce fait à partir de principes élémentaires dans le cours.
[6] On a la même remarque que pour le point (a) concernant $b' \neq 0$.