

Mathématique Élémentaire

Test n° 2

(26 septembre 2005)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez la contraposée de la proposition $(p \wedge q) \Rightarrow r$ en n'utilisant que les connecteurs \neg , \wedge , \vee . Expliquez votre démarche et énoncez clairement les propriétés que vous utilisez.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Résoudre dans \mathbb{C} :

■ $z^2 = 3$

■ $z^2 = -1$

■ $z^2 = i$

■ $z^2 = 3i$

Question 3. Soient les propositions P, Q, R définies par :

P : les nombres complexes $2 + 3i$ et $2 - 5i$ sont conjugués.

Q : les nombres complexes $1 + i$ et $2 + 2i$ ont le même argument.

R : l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Quelle est la valeur de vérité de $(P \wedge Q) \vee R$? Déterminez votre raisonnement et énoncez les propriétés que vous utilisez.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4.

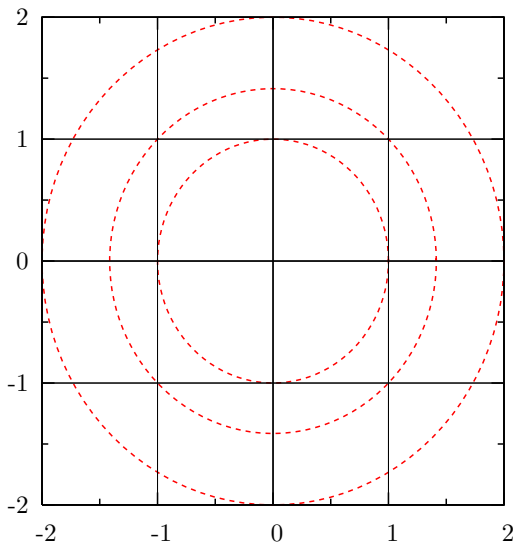
■ Évaluez et représentez graphiquement les opérations suivantes :

(a) $(1 - i) + (-1 - i)$

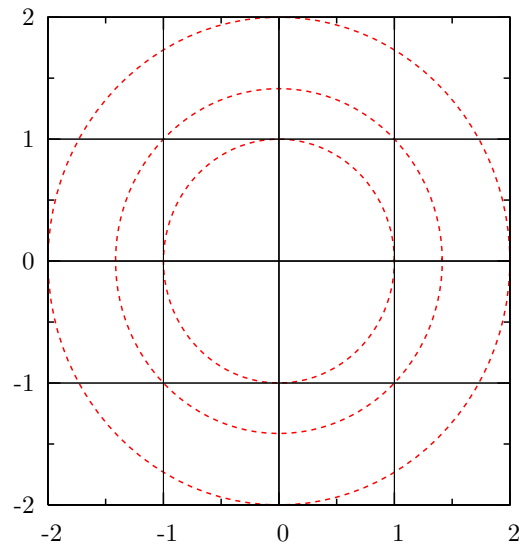
(b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

(c) $(1 - i) \cdot (-1 - i)$

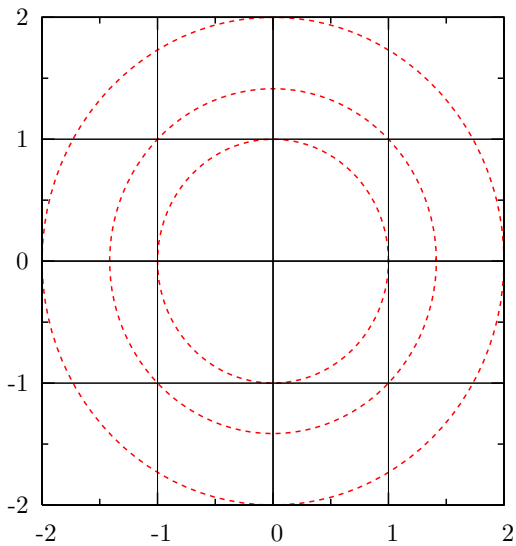
(d) $(1 - i)^{-1}$



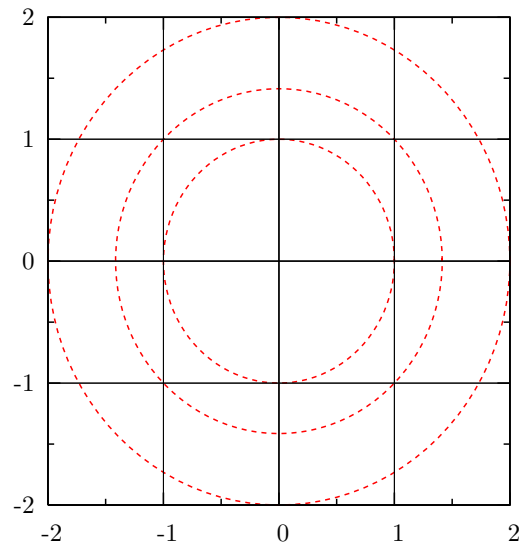
(a)



(b)



(c)



(d)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4 (suite).

■ Calculez

▶ $|1 + 7i|$

▶ $|(1 + 7i)^2|$

▶ $|(1 + 7i)^{-1}|$

■ Prouvez que $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Question 5. Soient deux propositions A et B . On considère les propositions

$$P : A \wedge B \qquad Q : \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Montrez que les deux propositions P et Q sont équivalentes. Expliquez votre démarche.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Donnez la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

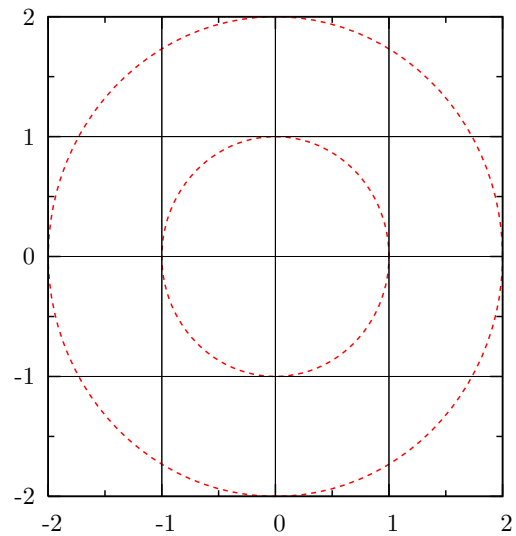
(a) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

(b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$

(c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-1}$

(d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n, n \in \mathbb{N}$, et la périodicité des valeurs obtenues.

Représentez graphiquement tous ces résultats ci-contre et expliquez votre raisonnement.



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. Les nombres $z_1 := \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ et $z_2 := \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ sont-ils solutions de l'équation $x^2 + (-4 + 6i)x - 5 = 0$?

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (26 septembre 2005)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Calculez les solutions dans \mathbb{C} des équations $3x^2 - 6x + 2 = 0$ et $3x^2 + \sqrt{12}x + 2 = 0$.

Question 9. Prouvez que deux nombres complexes conjugués sont toujours solutions d'une même équation $x^2 + bx + c = 0$ avec $b, c \in \mathbb{R}$.