Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (26 septembre 2005) **Correction**

Question 1. *Donnez la contraposée de la proposition $(p \wedge q) \Rightarrow r$ en n'utilisant que les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Expliquez votre démarche et énoncez clairement les propriétés que vous utilisez.*

On a vu que la contraposée de $a \Rightarrow b$ est $\neg b \Rightarrow \neg a$. Ici, la contraposée de la proposition $(p \wedge q) \Rightarrow r$ est donc $\neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q)$. On sait aussi que la proposition $a \Rightarrow b$ est équivalente à $\neg a \vee b$. Ainsi, $\neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q)$ sera équivalente à

$$\neg(\neg r) \vee \neg(p \wedge q)$$

c'est-à-dire sera équivalente à $r \vee \neg p \vee \neg q$ par les lois de De Morgan.

Question 2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$:*

(a) $z^2 = 3$

Les solutions sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

(b) $z^2 = -1$

Les solutions sont $\boldsymbol{i}$ et $-\boldsymbol{i}$ par définition de $\boldsymbol{i}$: $\boldsymbol{i}^2 = -1$ et donc $(-\boldsymbol{i})^2 = (-1)^2\boldsymbol{i}^2 = -1$.

(c) $z^2 = \boldsymbol{i}$

On a vu que $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \boldsymbol{i}$, donc les solutions sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, c'est-à-dire $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$.

(d) $z^2 = 3\boldsymbol{i}$

On utilise le fait qu'il suffit de résoudre les équations (a) et (c) pour obtenir les solutions par multiplication de celles de (a) et (c), c'est-à-dire que les solutions sont $\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ et $-(\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})$, ou encore $\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$.

Question 3. *Soient les propositions P, Q, R définies par :*

> P : *les nombres complexes $2+3\boldsymbol{i}$ et $2-5\boldsymbol{i}$ sont conjugués.*
> Q : *les nombres complexes $1+\boldsymbol{i}$ et $2+2\boldsymbol{i}$ ont le même argument.*
> R : *l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.*

Quelle est la valeur de vérité de $(P \wedge Q) \vee R$? Détaillez votre raisonnement et énoncez les propriétés que vous utilisez.

La proposition P est fausse. En effet, deux complexes z_1 et z_2 sont conjugués ssi $\Re\mathrm{e}\, z_1 = \Re\mathrm{e}\, z_2$ et $\Im\mathrm{m}\, z_1 = -\Im\mathrm{m}\, z_2$. Or $\Re\mathrm{e}\,(2+3\boldsymbol{i}) = \Re\mathrm{e}\,(2-5\boldsymbol{i}) = 2$ mais $\Im\mathrm{m}\,(2+3\boldsymbol{i}) = 3$ et $\Im\mathrm{m}\,(2-5\boldsymbol{i}) = -5$.

La proposition Q est vraie. En effet, comme $2+2\boldsymbol{i} = 2(1+\boldsymbol{i})$, les complexes $1+\boldsymbol{i}$ et $2+2\boldsymbol{i}$ sont situés sur la même demi-droite issue de l'origine. Ils ont donc le même argument.

La proposition R est vraie. On a vu par la table de vérité de l'implication que :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	1	1

En résumé, on a :

P	Q	$P \wedge Q$	R	$(P \wedge Q) \vee R$
0	1	0	1	1

La proposition donnée est donc vraie.

Question 4.

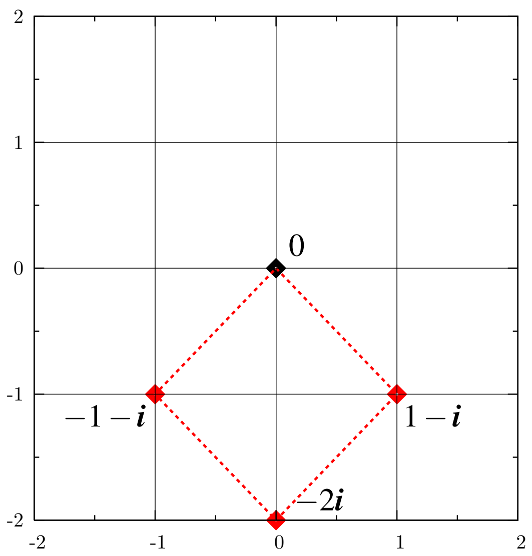
■ *Évaluez et représentez graphiquement les opérations suivantes :*

(a) $(1-\boldsymbol{i})+(-1-\boldsymbol{i}) = -2\boldsymbol{i}$

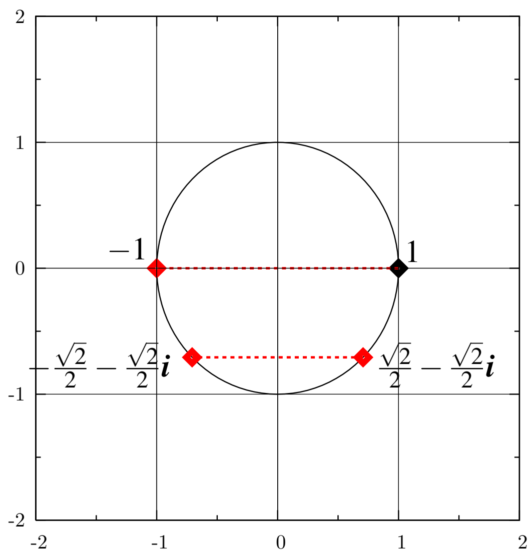
(b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right) = -1 = -1+0\boldsymbol{i}$

(c) $(1-\boldsymbol{i})\cdot(-1-\boldsymbol{i}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2})\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}) = 2(-1) = -2$

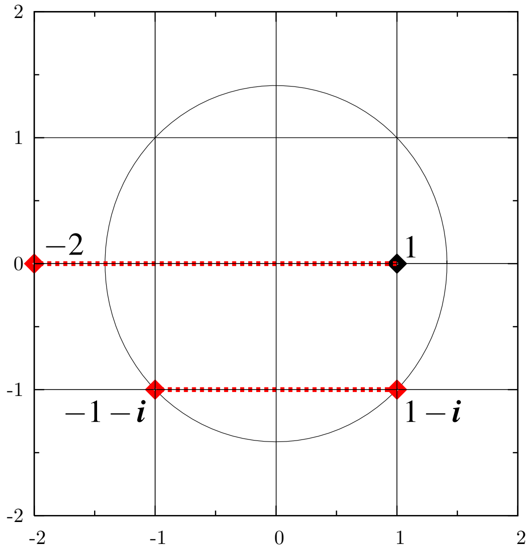
(d) $(1-\boldsymbol{i})^{-1} = \sqrt{2}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{\frac{\sqrt{2}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}$, en utilisant le fait que l'inverse d'un complexe de module 1 est son conjugué.



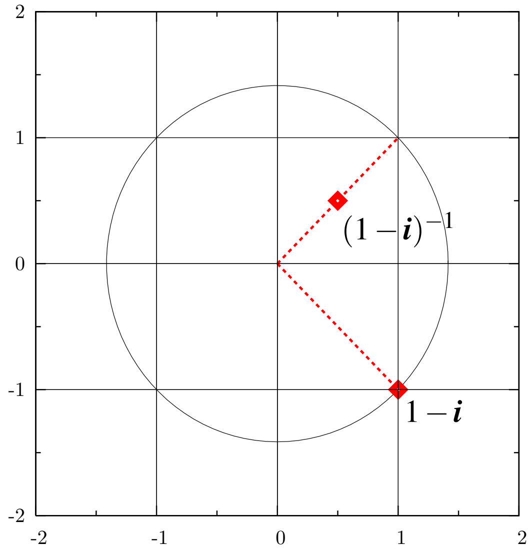
(a)



(b)



(c)



(d)

- *Calculez*
  - $|1+7\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50} = \sqrt{2}\sqrt{25} = 5\sqrt{2}$
  - $|(1+7\boldsymbol{i})^2| \underset{\underset{|z^2|=|z|^2}{\uparrow}}{=} |1+7\boldsymbol{i}|^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$
  - $|(1+7\boldsymbol{i})^{-1}| \underset{\underset{|z^{-1}|=|z|^{-1}}{\uparrow}}{=} |1+7\boldsymbol{i}|^{-1} = \left(5\sqrt{2}\right)^{-1} = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$
- *Prouvez que* $\forall z \in \mathbb{C},\ z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

  On sait (vu au cours) que si $z \neq 0$, alors $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$, donc $z \cdot z^{-1} = 1 = z \cdot \overline{z}/|z|^2$, c'est-à-dire $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Pour $z = 0$, c'est évident puisque $\overline{z} = 0$ et $|z| = 0$. Donc on a prouvé $\forall z \in \mathbb{C},\ z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Question 5. *Soient deux propositions A et B. On considère les propositions*

$$P : A \wedge B \qquad\qquad Q : \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Montrez que les deux propositions P et Q sont équivalentes. Expliquez votre démarche.

Il suffit de montrer que la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$P : A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$	$Q : \neg(\neg A \vee \neg B)$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1

Question 6. *Donnez la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :*

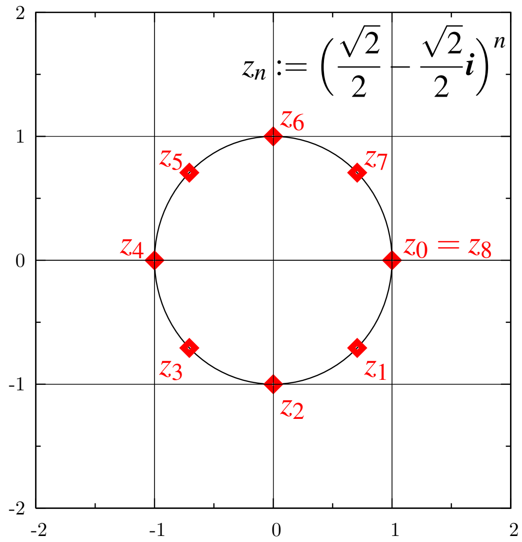
(a) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$

(b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^3$

(c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^{-1}$

(d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$*, $n \in \mathbb{N}$, et la périodicité des valeurs obtenues.*

Représentez graphiquement tous ces résultats ci-contre et expliquez votre raisonnement.



(a) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ est de module 1, son argument $\frac{7\pi}{4}$, donc $\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$.

(b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \left(\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\right)^3 = \operatorname{cis}\frac{21\pi}{4} = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$. Comme $\frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi[$, c'est bien la forme trigonométrique.

(c) L'inverse d'un complexe de module 1 est son conjugué, donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} = \left(\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\right)^{-1} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$.

(d) On a que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \left(\operatorname{cis}(-\frac{\pi}{4})\right)^n = \operatorname{cis}\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{n\pi}{4} \bmod 2\pi\right)$; on obtient ainsi que $\left(\operatorname{cis}(-\frac{\pi}{4})\right)^0 = 1 = \operatorname{cis} 0$, $(\operatorname{cis}(-\frac{\pi}{4}))^1 = \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$; pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, on obtient $\operatorname{cis}\frac{6\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\pi = -1$, $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{i}$, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, pour $n = 8$, on obtient $\operatorname{cis} 0 = 1$ et donc la périodicité est 8.

Question 7. *Les nombres* $z_1 := \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\boldsymbol{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ *et* $z_2 := \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}\boldsymbol{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ *sont-ils solutions de l'équation* $x^2 + (-4 + 6\boldsymbol{i})x - 5 = 0$ *?*

Il suffit de vérifier par calcul direct que $z_1^2 + (-4 + 6\boldsymbol{i})z_1 - 5 = 0$ et de même pour z_2, c'est-à-dire $z_2^2 + (-4 + 6\boldsymbol{i})z_2 - 5 = 0$.
Une autre façon de faire est d'utiliser le fait que z_1, z_2 sont racines de $x^2 + bx + c$ ssi $(x - z_1)(x - z_2) = x^2 + bx + c$, c'est-à-dire ssi $x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 z_2 = x^2 + bx + c$, c'est-à-dire ssi $-(z_1 + z_2) = b$ et $z_1 z_2 = c$. Dans le cas présent, cela revient à vérifier que :

$$z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\boldsymbol{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}\boldsymbol{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 4 - 6\boldsymbol{i} \qquad \text{et} \qquad z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\boldsymbol{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}\boldsymbol{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = -5.$$

En mettant au même dénominateur le membre de gauche de la première égalité, on trouve

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3}\boldsymbol{i}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2})(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\boldsymbol{i}) \\ &= \sqrt{6} + 3\boldsymbol{i} - 2 - \sqrt{6}\boldsymbol{i} - \sqrt{6} - 2 + 3\boldsymbol{i} + \sqrt{6}\boldsymbol{i} = 6\boldsymbol{i} - 4. \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $4-6\boldsymbol{i} \neq 6\boldsymbol{i}-4$, z_1 et z_2 ne sont pas solutions de l'équation.
REMARQUE : On vérifie aisément $z_1 z_2 = \frac{-3-2}{1} = -5$. Donc, vu (1), on a $(-z_1)+(-z_2) = 4-6\boldsymbol{i}$ et $(-z_1)(-z_2) = -5$. Les solutions de l'équation sont donc $-z_1$ et $-z_2$.

Question 8. *Calculez les solutions dans $\mathbb{C}$ des équations*

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \tag{2}$$

$$3x^2 + \sqrt{12}x + 2 = 0 \tag{3}$$

On constate que le Δ de (2) est $(-6)^2 - 4(3\cdot 2) = 12$ et que le Δ de (3) est $(\sqrt{12})^2 - 4(3.2) = -12$.
L'équation $Y^2 = 12$, a pour solutions dans $\mathbb{C}$, $\sqrt{12}$ et $-\sqrt{12}$.
L'équation $Y^2 = -12$ a pour solutions dans $\mathbb{C}$, $\sqrt{12}\boldsymbol{i}$ et $-\sqrt{12}\boldsymbol{i}$.
Donc les solutions de (2) sont (par la formule $x_1 = \frac{-b+y_1}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+y_2}{2a}$ où y_1, y_2 sont les solutions de l'équation $Y^2 = \Delta$) $x_1 = \frac{6+\sqrt{12}}{6}$ et $x_2 = \frac{6-\sqrt{12}}{6}$ et, pour l'équation (3), on a les solutions $x_1 = \frac{-\sqrt{12}+\sqrt{12}\boldsymbol{i}}{6}$ et $x_2 = \frac{-\sqrt{12}-\sqrt{12}\boldsymbol{i}}{6}$.

Question 9. *Prouvez que deux nombres complexes conjugués sont toujours solutions d'une* même *équation $x^2+bx+c=0$ avec $b,c \in \mathbb{R}$.*

Soient z et $\bar{z}$ deux complexes conjugués. Ils sont solutions de l'équation : $(X-z)(X-\bar{z}) = 0$, c'est-à-dire que $X^2 - (z+\bar{z})X + z\bar{z} = 0$ et en cours, on a vérifié que $\forall z \in \mathbb{C},\ z+\bar{z} \in \mathbb{R}$ et $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ — en fait $z+\bar{z} = 2\,\Re\mathrm{e}\, z$ et $z\bar{z} = |z|^2$ (voir question 4).