

Mathématique Élémentaire

Test n° 3

(3 octobre 2005)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit D_1 la droite d'équation $(x, y) = (-1, 2) + \lambda(-3, 4)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une équation cartésienne de la droite D_2 perpendiculaire à D_1 et passant par le point $(-1, -1)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soient $u, v \in \mathbb{R}^N$.

(a) Définissez la norme euclidienne de u , notée $\|u\|$. Donnez une interprétation géométrique de $\|u\|$ lorsque $u \in \mathbb{R}^2$.

(b) Montrez que $\|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$. Détaillez vos calculs.

(c) Montrez que $\|u + v\| = \|u - v\|$ si et seulement si u et v sont orthogonaux. Détaillez votre raisonnement et énoncez les résultats que vous utilisez.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

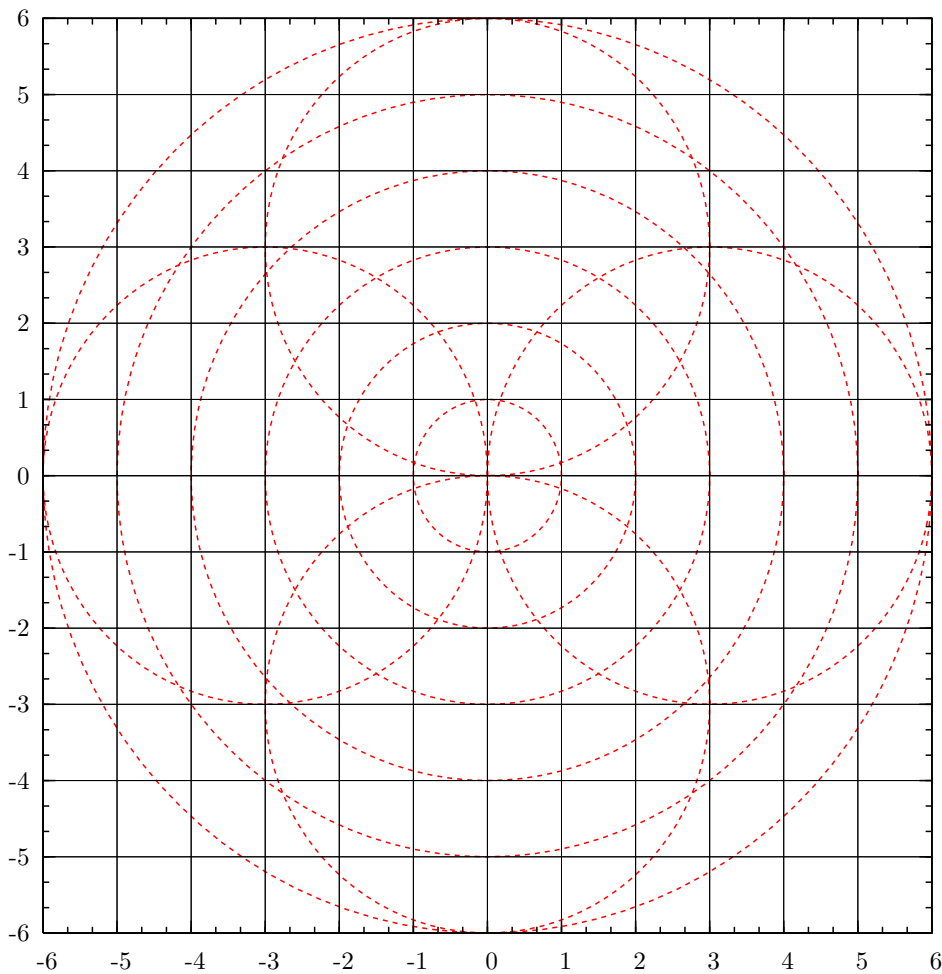
Question 3. Calculez la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

■ $z_1 := \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$

■ $z_2 := 3 + 3\sqrt{3}i$

■ $z_3 := (3 + 3\sqrt{3}i)^{-1}$

Représentez ces nombres sur le dessin ci-dessous.



Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Dans le plan muni d'un repère orthogonal X - Y , on considère la droite D d'équation $ax + by = c$. Donnez des conditions sur a, b, c pour que

(a) D passe par l'origine du repère ;

(b) D ne soit pas parallèle à l'axe des x ;

(c) D soit parallèle à la droite D_1 d'équation $y = 2x + 1$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Décrivez géométriquement et faites un dessin de chacun des ensembles suivants :

- $E := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 3\}$;
- $E_{z_0} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = 3\}$ où $z_0 \in \mathbb{C}$;
- $B := \{z \in \mathbb{C} : \Im z + \Re z = 2\}$.

Justifiez vos réponses.

Question 6. Soit $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$. Complétez la phrase suivante de manière à ce qu'elle soit vraie¹ :

$u \neq 0$ si et seulement si

¹La réponse ne peut bien entendu pas être « $u \neq 0$ » !

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Prouvez *par induction* que, pour tout $n \geq 4$,

$$\left| \left(3 \operatorname{cis} \left(\frac{27}{84} \pi \right) \right)^n \right| > 2^{n+2}$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifiant $z_0^2 = 1 + 4i$. Calculez $|z_0|$ (sans calculer le ou les z_0 possibles).

Question 9. Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :

■ $\text{cis } \frac{\pi}{3}$

■ $6 \text{cis } \frac{\pi}{3}$

■ $\text{cis } \frac{5\pi}{3}$