Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (3 octobre 2005) **Correction**

Question 1. *Soit D_1 la droite d'équation $(x,y) = (-1,2) + \lambda(-3,4)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une équation cartésienne de la droite D_2 perpendiculaire à D_1 et passant par le point $(-1,-1)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Un vecteur directeur de D_1 est $(-3,4)$. Comme D_2 est perpendiculaire à D_1, $(-3,4)$ est un vecteur normal de D_2. Une équation cartésienne de D_2 sera donc de la forme

$$-3x + 4y = c. \tag{1}$$

On détermine c en exprimant que le point $(-1,-1)$ appartient à D_2. En remplaçant x par -1 et y par -1 dans (1), on trouve $-3\cdot(-1) + 4\cdot(-1) = c$, c'est-à-dire $c = -1$. Une équation cartésienne de D_2 est donc $-3x + 4y = -1$.

Question 2. *Soient $u, v \in \mathbb{R}^N$.*

(a) *Définissez la norme euclidienne de u, notée $\|u\|$. Donnez une interprétation géométrique de $\|u\|$ lorsque $u \in \mathbb{R}^2$.*

Posons $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$. Alors $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2}$. Si $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\|$ représente la longueur du vecteur u.

(b) *Montrez que $\|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$. Détaillez vos calculs.*

$$\begin{aligned}
\text{On a } \|u\| = 0 \ &\text{ssi } \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2} = 0 \\
&\text{ssi } u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2 = 0 && \text{(On « élève au carré » les deux membres de l'égalité)} \\
&\text{ssi } u_1^2 = u_2^2 = \cdots = u_N^2 = 0 && \text{(Prop : } a^2 + b^2 = 0 \text{ ssi } a^2 = 0 \text{ et } b^2 = 0) \\
&\text{ssi } u_1 = u_2 = \cdots = u_N = 0 && \text{(Prop : } x^2 = 0 \text{ ssi } x = 0) \\
&\text{ssi } u = (0, 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

(c) *Montrez que $\|u+v\| = \|u-v\|$ si et seulement si u et v sont orthogonaux. Détaillez votre raisonnement et énoncez les résultats que vous utilisez.*

On a $\|u+v\| = \|u-v\|$

$$\begin{aligned}
&\text{ssi } \|u+v\|^2 = \|u-v\|^2 && \text{(On élève au carré les deux membres de l'égalité)} \\
&\text{ssi } (u+v)\cdot(u+v) = (u-v)\cdot(u-v) && \text{(Prop : } \|x\|^2 = x\cdot x) \\
&\text{ssi } u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v && \text{(Distributivité du produit scalaire sur la somme)} \\
&\qquad = u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u + v\cdot v \\
&\text{ssi } 2u\cdot v = -2u\cdot v && \text{(Commutativité du produit scalaire)} \\
&\text{ssi } 4u\cdot v = 0 \\
&\text{ssi } u\cdot v = 0 \\
&\text{ssi } u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux}
\end{aligned}$$

Question 3. *Calculez la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :*

- $z_1 := \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

  On a $|z_1| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{-\sqrt{3}}{2})^2} = 1$. Finalement, on a $z_1 = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$.

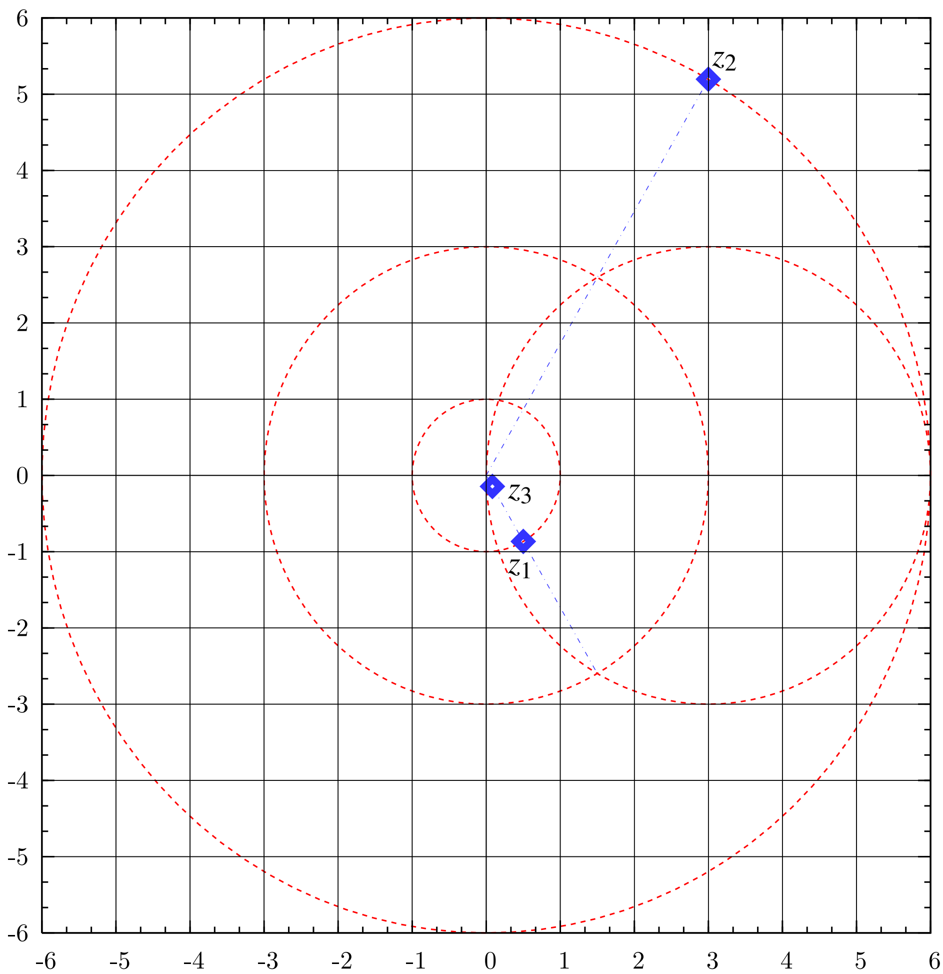
- $z_2 := 3 + 3\sqrt{3}\boldsymbol{i}$

  On a $|z_2| = |6 \cdot (\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2})| = 6$; $\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le conjugué de $\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $z_2 = 6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$.

- $z_3 := \left(3 + 3\sqrt{3}\boldsymbol{i}\right)^{-1}$

  On a $z_3 = z_2^{-1}$, donc $|z_3| = |z_2^{-1}| = |z_2|^{-1} = \frac{1}{6}$ (par la règle $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, pour tout $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$). Puisque l'argument de z_2^{-1} est l'opposé de l'argument de z_2, ou encore l'argument du conjugué, on a $z_3 = \frac{1}{6} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$.

Représentez ces nombres sur le dessin ci-dessous.



Question 4. *Dans le plan muni d'un repère orthogonal X-Y, on considère la droite D d'équation $ax+by=c$. Donnez des conditions sur a,b,c pour que*

(a) *D passe par l'origine du repère ;*

Pour que l'équation soit celle d'une droite, il faut $(a,b) \neq (0,0)$, c'est-à-dire $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Ensuite, on exprime que $(0,0)$ vérifie l'équation i.e., $a \cdot 0 + b \cdot 0 = c$. On trouve alors que c doit valoir 0. En conclusion, on a les conditions[1] $(a \neq 0 \vee b \neq 0) \wedge c = 0$.

(b) *D ne soit pas parallèle à l'axe des x ;*

Ici aussi, nous devons supposer

$$a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0. \tag{2}$$

On a vu que toute droite parallèle à l'axe des x a une équation de la forme

$$y = k \text{ pour un certain } k \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Pour que D ne soit pas parallèle à l'axe des x, il faut que l'équation $ax+by=c$ ne puisse pas se ramener à une équation du type (3).

- Si $b \neq 0$, alors l'équation de D s'écrit $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$.
  Si $a = 0$, alors l'équation de D devient $y = \frac{c}{b}$. C'est donc une équation de type (3), ce qui ne nous intéresse pas ici.
  Si $a \neq 0$, alors l'équation de D contient toujours un terme en x et ne peut pas se ramener à une équation du type (3).
- Si $b = 0$, alors, vu les conditions (2), forcément $a \neq 0$. L'équation de D s'écrit $ax = c$, c'est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des y — qui ne vérifie donc pas (3).

On peut résumer ce qu'on a montré ci-dessus par le tableau :

	$b \neq 0$	$b = 0$
$a = 0$	$D \parallel$ axe des x	exclu par (2)
$a \neq 0$	D n'est pas parallèle à l'axe des x	

On retient donc comme seule condition $a \neq 0$. Il n'y a pas de condition sur b et c.

(c) *D soit parallèle à la droite D_1 d'équation $y = 2x+1$.*

Comme dans les cas précédents, nous devons supposer (2). On a vu que des droites parallèles ont la même pente. La pente de D_1 vaut 2.

- Si $b \neq 0$, alors la pente de D est définie et vaut $\frac{-a}{b}$. Il faut donc $\frac{-a}{b} = 2$, c'est-à-dire $a = -2b$ pour que D et D_1 soient parallèles.
- Si $b = 0$, alors la pente de D n'est pas définie. En fait, vu les conditions (2), on a $a \neq 0$ et D est une droite parallèle à l'axe des y. D et D_1 ne sont donc pas parallèles.

En conclusion, les conditions à retenir sont $b \neq 0$ et $a = -2b$. Il n'y a pas de conditions sur c.

[1] Remarquons que la manière dont on a dérivé ces conditions montre qu'elles sont nécessaires. Il faudrait aussi prouver leur suffisance, c'est-à-dire prouver qu'elles impliquent que D passe par l'origine. C'est bien le cas car, si $c = 0$, $D \equiv ax+by=0$ et donc $(0,0) \in D$.

Question 5. *Décrivez géométriquement et faites un dessin de chacun des ensembles suivants :*

- $E := \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 3\}$;
- $E_{z_0} := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = 3\}$ *où* $z_0 \in \mathbb{C}$;
- $B := \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m}\, z + \Re\mathrm{e}\, z = 2\}$.

Justifiez vos réponses.

- E : $|z-2| = 3$ se traduit par $\sqrt{(\Re\mathrm{e}\,(z-2))^2 + (\Im\mathrm{m}\,(z-2))^2} = 3$ ou encore par $(\Re\mathrm{e}\, z - 2)^2 + (\Im\mathrm{m}\, z)^2 = 9$ ou encore le point de coordonnées $(\Re\mathrm{e}\, z, \Im\mathrm{m}\, z)$ est sur le cercle de rayon 3 et de centre $(2,0)$. E est donc constitué des complexes de ce cercle.
- E_{z_0} est constitué des points situés à distance 3 de z_0, c'est-à-dire des points de coordonnées $(\Re\mathrm{e}\, z, \Im\mathrm{m}\, z)$ sur le cercle d'équation $(\Re\mathrm{e}\, z - \Re\mathrm{e}\, z_0)^2 + (\Im\mathrm{m}\, z - \Im\mathrm{m}\, z_0)^2 = 9$, et donc ce cercle a pour centre z_0.
- B est constitué des points z dont les coordonnées $(\Re\mathrm{e}\, z, \Im\mathrm{m}\, z)$ vérifient l'équation de droite $\Im\mathrm{m}\, z + \Re\mathrm{e}\, z = 2$.

Question 6. *Soit* $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$. *Complétez la phrase suivante de manière à ce qu'elle soit vraie*[2] *:*

u $\neq 0$ *si et seulement si* $\boxed{u_1 \neq 0 \text{ ou } u_2 \neq 0 \text{ ou } \dots \text{ ou } u_N \neq 0.}$

Question 7. *Prouvez* par induction *que, pour tout* $n \geqslant 4$,

$$\left|\left(3\,\mathrm{cis}\left(\frac{27}{84}\pi\right)\right)^n\right| > 2^{n+2}$$

On sait, par la règle $|z^n| = |z|^n$, que $\left|(3\,\mathrm{cis}\,\frac{27\pi}{84})^n\right| = 3^n$. Il s'ensuit que nous avons à prouver que :

$$\forall n \geqslant 4, \quad 3^n > 2^{n+2} \tag{4}$$

Cas de base : pour $n = 4$, il faut donc vérifier $3^4 > 2^{4+2}$, c'est-à-dire $81 > 64$, ce qui est vrai.

Étape d'induction : supposons que (4) est vérifiée pour n satisfaisant $4 \leqslant n \leqslant k$, montrons que l'inégalité (4) est vérifiée en $n = k+1$, c'est-à-dire $3^{k+1} > 2^{k+1+2}$. Par hypothèse d'induction, on sait que $3^k > 2^{k+2}$, on a $3 > 2$, et donc en multipliant membre à membre ces deux inégalités, on obtient $3^{k+1} > 2^{k+2+1}$.

Question 8. *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $z_0^2 = 1 + 4\boldsymbol{i}$. *Calculez* $|z_0|$ *(sans calculer le ou les* z_0 *possibles).*

En prenant le module des deux membres de l'égalité que satisfait z_0, on obtient $|z_0|^2 = |z_0^2| = |1+4\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$. Dès lors, $|z_0| = \sqrt{\sqrt{17}} = 17^{1/4}$.

[2]La réponse ne peut bien entendu pas être « $u \neq 0$ » !

Question 9. *Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :*

- $\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$

  $\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $6\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$

  $6\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = \frac{6}{2} + \boldsymbol{i}\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3 + \boldsymbol{i}3\sqrt{3}$

- $\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{3}$

  $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Remarque : $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3} = \operatorname{cis} -\frac{\pi}{3} = \overline{\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}$.