

Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(10 octobre 2005)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient a, b, c, d quatre nombres réels. Prouvez, à partir des propriétés élémentaires de l'inégalité, que si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

/2

Question 2. Écrire explicitement la liste (sans répétition) des éléments de $\{(\operatorname{cis} \frac{\pi}{2})^n z \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

/2

Question 3. Calculez le module de z si $z^n = 1 + 4i$ avec $n \in \mathbb{N}$.

/1

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Écrivez l'ensemble suivant $A \subseteq \mathbb{R}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints :

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x+4}-2} \right\}$$

Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

/6

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/6

Question 5.

- Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(-5, -1, 2)$ et perpendiculaire au plan d'équation $x - 3z = 4$.

- Donnez une équation cartésienne du plan β passant par le point $(0, 2, 4)$ et parallèle au plan γ d'équation $3x - 2y + 5z = 7$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

/5

Question 6. Résolvez de manière graphique l'inéquation

$$||x| - 1| \leq x + 1$$

Expliquez comment vous construisez le graphique et comment vous l'utilisez pour trouver la solution.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/6

Question 7.

(a) Établissez l'égalité d'ensembles :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (|x-1| + |x|)^2 - (|x-1| + |x|) \leq 6\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| + |x| \leq 3\} \quad (1)$$

(b) En vous aidant de (1), résolvez l'inéquation $(|x-1| + |x|)^2 - (|x-1| + |x|) \leq 6$.

Question 8. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit les trois ensembles suivants :

$$U_n := \{u \in \mathbb{C} \mid u^n = 1\}$$

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = i\}$$

$$B := \left\{ u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n} \mid u \in U_n \right\}$$

Prouvez que $A = B$ i.e., $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

/ 4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. On appelle règle de commutation la relation $ab = ba$. Sans utiliser cette règle, prouvez que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. De nouveau sans utiliser cette règle, donnez une formule pour $(a + b)^2$.

/2

Question 10. Sachant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\text{cis } \theta)^n = \text{cis}(n\theta)$, prouver que si $z \in \mathbb{Z}$, $(\text{cis } \theta)^z = \text{cis}(z\theta)$.

/1