Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (10 octobre 2005) Correction

Question 1. *Soient a, b, c, d quatre nombres réels. Prouvez, à partir des propriétés élémentaires de l'inégalité, que si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.*

Comme $c \geqslant 0$, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité $a \leqslant b$ par c sans en changer le sens, ce qui donne $ac \leqslant bc$. De même, en multipliant les deux membres de $c \leqslant d$ par $b \geqslant 0$, on obtient $bc \leqslant bd$. De $ac \leqslant bc$ et $bc \leqslant bd$, on conclut par transitivité que $ac \leqslant bd$.

Question 2. *Écrire explicitement la liste (sans répétition) des éléments de $\left\{(\operatorname{cis}\frac{\pi}{2})^n z \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ où $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Comme $\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{i}$, on obtient donc z, $\boldsymbol{i}z$, $-z$, $-\boldsymbol{i}z$, $z, \dots$ pour respectivement $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots$. Donc l'ensemble est égal à $\{z,\ \boldsymbol{i}z,\ -z,\ -\boldsymbol{i}z\}$.

Question 3. *Calculez le module de z si $z^n = 1 + 4\boldsymbol{i}$ avec $n \in \mathbb{N}$.*

Puisque $z^n = 1 + 4\boldsymbol{i}$, on a $|z^n| = |1 + 4\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$. Donc, vu que $|z^n| = |z|^n$, on a $|z|^n = \sqrt{17}$. Si $n = 0$, c'est impossible. Si $n > 0$, on obtient $|z| = \sqrt[n]{\sqrt{17}} = \sqrt[2n]{17} = 17^{1/(2n)}$.

Question 4. *Écrivez l'ensemble suivant $A \subseteq \mathbb{R}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints :*

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{5}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x+4} - 2}\right\}$$

Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

CONDITIONS D'EXISTENCE : Pour que $5/x$ ait un sens, il faut $x \neq 0$. Pour $\frac{1}{\sqrt{x+4}-2}$, il est nécessaire que $x + 4 \geqslant 0$ et $\sqrt{x+4} - 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \geqslant -4$ et $\sqrt{x+4} \neq 2$ cette dernière condition étant équivalente à $x \neq 0$ (on peut élever au carré car les deux membres sont positifs). En conclusion on s'intéresse seulement aux $x \in [-4, +\infty[\setminus \{0\}$.

RÉSOLUTION : Commençons par remarquer que $\sqrt{x+4} - 2 > 0$ ssi $\sqrt{x+4} > 2$ ssi (vu que les deux membres sont positifs) $x + 4 > 4$ ssi $x > 0$. On a donc à distinguer deux cas :

- Si $x > 0$, on multiplie l'inégalité par chacun des deux dénominateurs (positifs tous deux), ce qui donne $5(\sqrt{x+4} - 2) \leqslant x$
- Si $x < 0$, on multiplie l'inégalité par $x < 0$ (ce qui en renverse le sens) puis par $\sqrt{x+4} - 2 < 0$, ce qui en renverse de nouveau le sens et on tombe à nouveau sur $\sqrt{x+4} - 2 \leqslant x/5$

Reste donc à résoudre $\sqrt{x+4} \leqslant \frac{1}{5}x + 2$. Si $\frac{1}{5}x + 2 < 0$, il n'y a pas de solutions (la racine est toujours positive). Si au contraire $x \geqslant -10$ (ce qui est toujours le cas au vu des conditions d'existence), on peut élever au carré ce qui donne après calculs : $\frac{1}{5}x(\frac{1}{5}x - 1) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$. À cause des conditions d'existence, il faut retirer $]-\infty, -4[$ et $\{0\}$, ce qui donne $A = [-4, 0[\cup [5, +\infty[$.

Question 5.

- *Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point* $(-5,-1,2)$ *et perpendiculaire au plan d'équation* $x-3z=4$.

  Un vecteur normal du plan se lit sur son équation. Il s'agit de $(1,0,-3)$. Puisque la droite D est perpendiculaire au plan, $(1,0,-3)$ est aussi un vecteur directeur de D. Une équation paramétrique de D est donc donnée par $(x,y,z)=(-5,-1,2)+\lambda(1,0,-3)$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

  On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} x=-5+\lambda & (1)\\ y=-1 & (2)\\ z=2-3\lambda & (3)\end{cases}$$

  De (1) et (3), on a : $\lambda=x+5=\frac{z-2}{-3}$. Un système d'équations cartésiennes de D est donc

$$\begin{cases} x+5=\dfrac{z-2}{-3}\\ y=-1\end{cases}$$

- *Donnez une équation cartésienne du plan* β *passant par le point* $(0,2,4)$ *et parallèle au plan* γ *d'équation* $3x-2y+5z=7$.

  Un vecteur normal de γ est donné par $(3,-2,5)$. Comme les plans β et γ sont parallèles, ce vecteur est aussi un vecteur normal du plan β. Une équation cartésienne de β sera donc de la forme

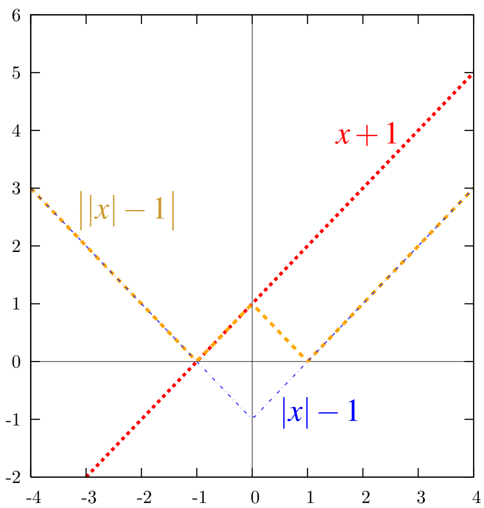
$$3x-2y+5z=d \tag{4}$$

  On détermine d en exprimant que le point $(0,2,4)$ appartient au plan β, c'est-à-dire en remplaçant dans (4) x par 0, y par 2 et z par 4. On a $3\cdot0-2\cdot2+5\cdot4=d$, donc $d=16$. Une équation cartésienne de β est par conséquent $3x-2y+5z=16$.

Question 6. *Résolvez de manière graphique l'inéquation*

$$\big||x|-1\big|\leqslant x+1$$

Expliquez comment vous construisez le graphique et comment vous l'utilisez pour trouver la solution.



Le graphe de $x+1$ est simplement la droite d'équation $y=x+1$ qui passe par $(-1,0)$ et $(0,1)$.

Pour $|x|-1$, il s'agit de $|x|$ dont on a retiré 1, c'est donc une translation verticale d'une unité vers le bas du graphe de $|x|$. Comme

$$\big||x|-1\big|=\begin{cases}|x|-1 & \text{si } |x|-1\geqslant 0\\ -(|x|-1) & \text{si } |x|-1\leqslant 0\end{cases}$$

son graphe coïncide avec celui de $|x|-1$ sur la partie positive des ordonnées (au-dessus de l'axe des x) et consiste en une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des x du graphe de $|x|-1$ lorsque celui-ci est dans la partie négative des ordonnées. L'inéquation dit qu'il faut regarder quand $\big||x|-1\big|$ est en-dessous (ou coincide) avec $x+1$. Le graphe montre que ceci a lieu pour tous les $x \geqslant -1$. On en conclut donc $\big||x|-1\big| \leqslant x+1$ ssi $x \geqslant -1$.

Question 7.

(a) *Établissez l'égalité d'ensembles :*

$$\big\{x \in \mathbb{R} \bigm| (|x-1|+|x|)^2 - (|x-1|+|x|) \leqslant 6\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| |x-1|+|x| \leqslant 3\big\} \tag{5}$$

(b) *En vous aidant de (5), résolvez l'inéquation* $(|x-1|+|x|)^2 - (|x-1|+|x|) \leqslant 6$.

(a) Brièvement, on peut dire que $(|x-1|+|x|)^2 - (|x-1|+|x|) \leqslant 6$ est l'inéquation $y^2 - y \leqslant 6$ avec $y = |x-1|+|x|$ et que, comme $y^2 - y \leqslant 6 \Leftrightarrow -2 \leqslant y \leqslant 3$, elle est équivalente à $-2 \leqslant |x-1|+|x| \leqslant 3$ c'est-à-dire $|x-1|+|x| \leqslant 3$ puisque le membre de gauche est toujours positif.

Détaillons[1] cet argument en montrant les deux inclusions :

- ($\subseteq$) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $(|x-1|+|x|)^2 - (|x-1|+|x|) \leqslant 6$. $|x-1|+|x|$ est donc un nombre y qui vérifie $y^2 - y \leqslant 6$. Or on sait que si $y^2 - y \leqslant 6$, on a $-2 \leqslant y \leqslant 3$, donc en particulier $y \leqslant 3$. Donc $|x-1|+|x| \leqslant 3$.
- ($\supseteq$) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-1|+|x| \leqslant 3$. On a aussi que $|x-1|+|x| \geqslant 0 \geqslant -2$. Donc $|x-1|+|x|$ est un nombre y qui vérifie $-2 \leqslant y \leqslant 3$. Comme cette dernière relation implique que $y^2 - y \leqslant 6$, on trouve bien que x appartient à l'ensemble de gauche de (5).

(b) L'égalité (5) dit qu'il suffit de résoudre $|x-1|+|x| \leqslant 3$. Distinguons différents cas :

	$x < 0$	$0 \leqslant x \leqslant 1$	$x > 1$
$\lvert x-1\rvert+\lvert x\rvert \leqslant 3$	$x \geqslant -1$	$1 \leqslant 3$	$x \leqslant 2$

En conclusion, $(|x-1|+|x|)^2 - (|x-1|+|x|) \leqslant 6 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2$.

Question 8.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit les trois ensembles suivants :

$$U_n := \big\{u \in \mathbb{C} \bigm| u^n = 1\big\}$$
$$A := \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| z^n = \boldsymbol{i}\big\}$$
$$B := \Big\{u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n} \Bigm| u \in U_n\Big\}$$

Prouvez que $A = B$ i.e., $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

[1] Une réponse correcte peut consister seulement en la première partie — pour autant que celle-ci soit correctement rédigée bien sûr !

Prouvons d'abord que $B \subseteq A$, c'est-à-dire que tout élément de B est un élément de A. Soit $u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$, un élément quelconque de B. On a $(u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^n = u^n \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ (règles sur les exposants et formule de De Moivre). Par hypothèse, $u \in U_n$, donc $u^n = 1$. On a donc montré que $(u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^n = \boldsymbol{i}$ (car $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{i}$), c'est-à-dire que $u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$ est solution de l'équation $z^n = \boldsymbol{i}$, et donc par définition de A, $u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$ est un élément de A.

Réciproquement, soit un élément quelconque de A, c'est-à-dire une solution z de $z^n = \boldsymbol{i}$; montrons que cet élément est un élément de B, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme $u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$ pour un certain $u \in U_n$. Comme $z = \big(z \cdot (\operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^{-1}\big) \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$, on pose $u := z \cdot (\operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^{-1}$. On a $u^n = \big(z(\operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^{-1}\big)^n = z^n \big((\operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^n\big)^{-1} = \boldsymbol{i}^{-1} \cdot \boldsymbol{i}$ (par hypothèse). Donc $u^n = 1$, c'est-à-dire qu'on a écrit z sous la forme $u \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$ avec u racine n^{e} de l'unité. Donc $z \in B$.

Question 9. *On appelle règle de commutation la relation $ab = ba$. Sans utiliser cette règle, prouvez que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. De nouveau sans utiliser cette règle, donnez une formule pour $(a+b)^2$.*

Par définition, l'inverse de x (s'il existe) est le nombre y vérifiant $xy = yx = 1$. Vérifions que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ en vérifiant cette définition, c'est-à-dire, à vérifier $(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = (b^{-1}a^{-1}) \cdot (ab) = 1$.

$$
\begin{aligned}
(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) &= a \cdot \big((b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1}\big) && \text{par associativité.} \\
&= a \cdot (1 \cdot a^{-1}) && \text{par définition de } b^{-1}. \\
&= a \cdot a^{-1} && \text{par le fait que 1 est neutre pour « } \cdot \text{ »} \\
&= 1 && \text{par définition de } a^{-1}.
\end{aligned}
$$

Une preuve presque identique prouve l'autre égalité. De plus $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$ par distributivité.

Question 10. *Sachant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\operatorname{cis} \theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta)$, prouver que si $z \in \mathbb{Z}$, $(\operatorname{cis} \theta)^z = \operatorname{cis}(z\theta)$.*

Il reste à prouver que si $z \in \mathbb{Z}$ tel que $z < 0$, alors $(\operatorname{cis} \theta^z = \operatorname{cis}(z\theta)$. On sait que $(\operatorname{cis} \theta)^z = ((\operatorname{cis} \theta)^{-1})^{-z} = \big(\operatorname{cis}(-\theta)\big)^{-z}$. Mais si $z < 0$, alors $-z > 0$, donc on peut appliquer la formule de De Moivre avec $n \geqslant 0$. On obtient donc $(\operatorname{cis} \theta)^z = (\operatorname{cis}(-\theta))^{-z} = \operatorname{cis}\big((-z)(-\theta)\big) = \operatorname{cis}(z\theta)$.