

# Mathématique Élémentaire

Test n° 5

(17 octobre 2005)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit la proposition  $P$  : « Je vais me baigner si et seulement s'il pleut ». Dites si les propositions suivantes sont équivalentes à la proposition  $P$ . Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

- Si je vais me baigner, alors il pleut et, s'il pleut, alors je vais me baigner.
- S'il ne pleut pas, alors je ne vais pas me baigner et, s'il pleut, alors je vais me baigner.
- S'il ne pleut pas, alors je ne vais pas me baigner et, si je ne vais pas me baigner, alors il ne pleut pas.
- Je ne vais pas me baigner si et seulement s'il ne pleut pas.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit  $S = \left\{ \left( \alpha, \frac{2\alpha - 7}{5} \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$  l'ensemble des solutions d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

/6

- (a) Les couples  $(-11, -3)$  et  $(-5, 2)$  sont-ils solutions du système ? Détaillez votre raisonnement.
- (b) Représentez l'ensemble  $S$  dans le plan cartésien  $\mathbb{R}^2$ .
- (c) Soit l'ensemble  $A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \text{le produit scalaire entre } (s, t) \text{ et } (2, -5) \text{ est positif}\}$ . Montrez que  $S$  est contenu dans  $A$  et que  $A$  n'est pas contenu dans  $S$ .

Question 3. Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ? Lorsque c'est le cas, déterminez leur domaine. Justifiez votre réponse de manière précise.

■  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$  tel que  $y^3 = x$ .

■  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$  tel que  $\sin y = x$ .

■  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto u$  tel que  $u^2 = z$ .

■  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D} : (a, b) \mapsto (D_{a,b} \equiv ax + by = 0)$  où  $\mathcal{D}$  désigne l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^2$ .

Question 4. Soient  $a, b$  deux nombres réels tels que  $a \leq 9$  et  $b \leq 3$ . Peut-on affirmer que  $a - b \leq 9 - 3 = 6$  ? Justifiez votre réponse par un argument ou un contre-exemple.

/ 6

/ 1

Question 5. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

(a) Représentez dans le plan complexe

$$z, \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z, \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z, -z, \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z, \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z. \quad (1)$$

(b) De quelle équation du sixième degré les six complexes de (1) sont-ils solutions ?

(c) Représentez dans le plan complexe les solutions de  $x^6 = 1$ .

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda^2 x + 4y = 2\lambda \\ \lambda x + y = \lambda/2 \end{cases}$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel. Résolvez ce système *uniquement* dans le cas où le déterminant du système est nul. Détaillez vos calculs et interprétez géométriquement vos résultats.

/6

Question 7. Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes.

■  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x - |x|}}$ .

■  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : x \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 - |x|} & \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \\ \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix}$

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Résoudre, par la méthode de la *solution particulière*, l'équation  $x^{27} = \text{cis}(3\pi/2)$ .

/ 3

Question 9. Prouver par l'absurde que  $1 + i\sqrt{2}$  ne peut pas s'obtenir comme un quotient de  $a + bi$  par  $c + di$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

/ 3