Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 5 (17 octobre 2005)

Correction

Question 1. *Soit la proposition P : « Je vais me baigner si et seulement s'il pleut ». Dites si les propositions suivantes sont équivalentes à la proposition P. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.*

- *Si je vais me baigner, alors il pleut et, s'il pleut, alors je vais me baigner.*

  La proposition P est du type $A \Leftrightarrow B$ avec A : « Je vais me baigner » et B : « Il pleut ». Ici la proposition est du type $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, ce qui est équivalent à $A \Leftrightarrow B$.

- *S'il ne pleut pas, alors je ne vais pas me baigner et, s'il pleut, alors je vais me baigner.*

  La proposition est du type $(\neg B \Rightarrow \neg A) \wedge (B \Rightarrow A)$. Or, $\neg B \Rightarrow \neg A$ est la contraposée de $A \Rightarrow B$ et on a vu qu'une proposition et sa contraposée sont équivalentes. Donc la proposition est équivalente à $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, c'est-à-dire $A \Leftrightarrow B$.

- *S'il ne pleut pas, alors je ne vais pas me baigner et, si je ne vais pas me baigner, alors il ne pleut pas.*

  La proposition est du type $(\neg B \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)$. Par le point précédent, $\neg B \Rightarrow \neg A$ est équivalent à $A \Rightarrow B$ et puisque $\neg A \Rightarrow \neg B$ est la contraposée de $B \Rightarrow A$, cette proposition est équivalente à $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, donc $A \Leftrightarrow B$.

- *Je ne vais pas me baigner si et seulement s'il ne pleut pas.*

  La proposition est du type $\neg A \Leftrightarrow \neg B$, ce qui est équivalent à $(\neg A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Par le point précédent, cette proposition est bien équivalente à $A \Leftrightarrow B$.

Question 2. *Soit* $S = \left\{ \left(\alpha, \dfrac{2\alpha - 7}{5} \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ *l'ensemble des solutions d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.*

(a) *Les couples $(-11, -3)$ et $(-5, 2)$ sont-ils solutions du système ? Détaillez votre raisonnement.*

(b) *Représentez l'ensemble S dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$.*

(c) *Soit l'ensemble $A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 :$ le produit scalaire entre (s,t) et $(2,-5)$ est positif$\}$. Montrez que S est contenu dans A et que A n'est pas contenu dans S.*

(a) Pour savoir si $(-11, -3)$ est solution du système, on regarde si ce couple est de la forme $(\alpha, \frac{2\alpha-7}{5})$ où α vaut ici -11. Or si $\alpha = -11$, on a $\frac{2\alpha-7}{5} = \frac{-22-7}{5} = \frac{-29}{5} \neq -3$. Donc $(-11, -3)$ n'est pas solution.

En procédant de façon analogue, si $\alpha = -5$, alors $\frac{2\alpha-7}{5} = \frac{-17}{5} \neq 2$. Donc $(-5, 2)$ n'est pas solution.

(b) Il s'agit de la droite D d'équation $2x-5y=7$. En effet, cette équation s'écrit $y=\frac{2x-7}{5}$. Un point de D est donc un couple de la forme $(\alpha,\frac{2\alpha-7}{5})$ où $\alpha\in\mathbb{R}$. D passe par $(\frac{7}{2},0)$ et par $(1,-1)$.

(c)
- $S\subseteq A$: Il faut prouver que tout élément de S est un élément de A. Soit un couple de la forme $(\alpha,\frac{2\alpha-7}{5})$ pour un certain $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrons que le produit scalaire de $(\alpha,\frac{2\alpha-7}{5})$ et de $(2,-5)$ est positif. On a : $(\alpha,\frac{2\alpha-7}{5})\cdot(2,-5)=2\alpha-(2\alpha-7)=7>0$.
- $S\not\supseteq A$: Montrons qu'il existe un élément de A qui n'appartient pas à S. On cherche donc un élément dont le produit scalaire avec $(2,-5)$ est positif et qui n'appartienne pas à la droite d'équation $2x-5y=7$. Prenons le couple $(0,-1)$. On a bien $(0,-1)\cdot(2,-5)=0+5=5>0$ mais $(0,-1)$ n'appartient pas à $D\equiv 2x-5y=7$. En effet, si on remplace x par 0 et y par -1 dans cette équation, on a $2\cdot 0+5=5\neq 7$.

Question 3. *Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ? Lorsque c'est le cas, déterminez leur domaine. Justifiez votre réponse de manière précise.*

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto y$ *tel que* $y^3=x$.

  Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, l'équation $y^3=x$ possède une unique solution, à savoir $y=\sqrt[3]{x}$. f est donc une fonction. Comme, quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $y^3=x$ possède une solution, $\operatorname{Dom} f=\{x\in\mathbb{R}:\exists y\in\mathbb{R},\ y^3=x\}=\mathbb{R}$.

- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto y$ *tel que* $\sin y=x$.

  g n'est pas une fonction. Par exemple pour $x=0$, $\{y:\sin y=0\}=\pi\mathbb{Z}$ et donc il y a plusieurs (une infinité d') éléments en relation avec $x=0$.

- $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}:z\mapsto u$ *tel que* $u^2=z$.

  h n'est pas une fonction. En effet, pour par exemple $z=1$, les deux valeurs $u=1$ et $u=-1$ sont solutions de l'équation $u^2=1$; à ce z ne correspond donc pas un u unique.

- $k:\mathbb{R}^2\to\mathscr{D}:(a,b)\mapsto(D_{a,b}\equiv ax+by=0)$ *où* $\mathscr{D}$ *désigne l'ensemble des droites de* $\mathbb{R}^2$.

  Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, la droite (si c'en est une) $D_{a,b}$ est univoquement définie par son équation. k est donc une fonction.

  Le domaine de k est l'ensemble des couples (a,b) tels que $D_{a,b}\in\mathscr{D}$ (il n'y a pas de problème d'existence de $D_{a,b}$, seulement de savoir s'il définit un élément de l'espace d'arrivée). Donc $\operatorname{Dom} k=\big\{(a,b):D_{a,b}\text{ est une droite}\big\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Question 4. *Soient a,b deux nombres réels tels que $a\leqslant 9$ et $b\leqslant 3$. Peut-on affirmer que $a-b\leqslant 9-3=6$? Justifiez votre réponse par un argument ou un contre-exemple.*

C'est bien évidemment faux ; il suffit de prendre $a=9$ et $b=0$.

Question 5. *Soit $z \in \mathbb{C} \wedge z \neq 0$.*

(a) *Représentez dans le plan complexe*

$$z, \quad \left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z, \quad \left(-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z, \quad -z, \quad \left(-\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z, \quad \left(\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z. \tag{1}$$

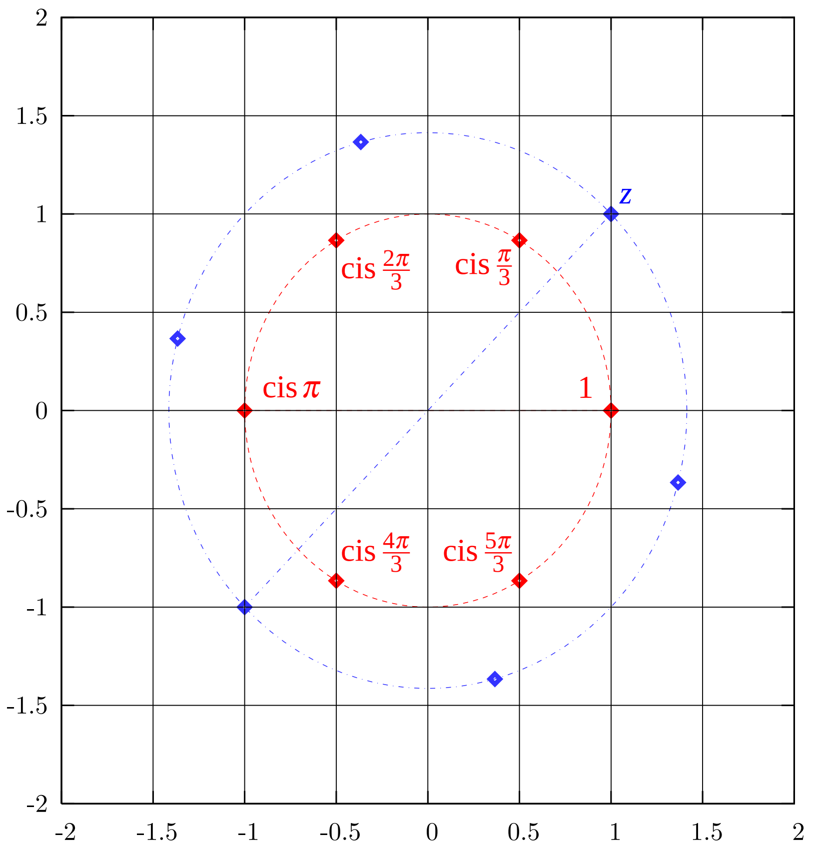
(b) *De quelle équation du sixième degré les six complexes de (1) sont-ils solutions ?*

(c) *Représentez dans le plan complexe les solutions de $x^6 = 1$.*

(a) Je choisis $z = 1+\boldsymbol{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ pour illustrer, à titre d'exemple, la représentation des six complexes. Celle-ci est obtenue par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et dilatation par un facteur $\sqrt{2}$ des racines de l'unité (voir la figure ci-dessous). Dans le cas général où $z = \rho\cos\theta$, on aurait une rotation d'angle θ et une dilatation par un facteur ρ de la figure représentant les racines sixièmes de l'unité.

(b) On remarque que les six complexes donnés sont de la forme $z\cdot u$ avec $u \in U_6$, l'ensemble des racines sixièmes de l'unité ; on obtient donc que $(z\cdot u)^6 = z^6\cdot u^6 = z^6$. Par conséquent, les complexes donnés sont solutions de l'équation $X^6 = z^6$.

(c) Les solutions de $x^6 = 1$ sont les complexes u apparaissant dans la liste ci-avant, c'est-à-dire $1,\ \frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ldots$ ou encore les $\operatorname{cis}\frac{2k\pi}{6},\ k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.



Question 6. *Soit le système*

$$\begin{cases} \lambda^2 x + 4y = 2\lambda \\ \lambda x + y = \lambda/2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système uniquement *dans le cas où le déterminant du système est nul. Détaillez vos calculs et interprétez géométriquement vos résultats.*

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} \lambda^2 & 4 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda-4)$.
Il est nul quand $\lambda = 0$ ou $\lambda = 4$.

- Premier cas : $\lambda = 0$
  Le système s'écrit :
  $$\begin{cases} 4y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
  Ce système se ramène donc à l'équation $y = 0$. L'ensemble des solutions est donc $S = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Dans ce cas, les équations du système sont les équations de deux droites confondues.
- Deuxième cas : $\lambda = 4$
  Le système s'écrit :
  $$\begin{cases} 16x + 4y = 8 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$
  Ce système se ramène à l'équation : $4x + y = 2$, c'est-à-dire $y = 2 - 4x$. On a donc $S = \big\{(\alpha, 2 - 4\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\}$. Dans ce cas, les équations du système sont les équations de deux droites confondues.

Question 7. *Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes.*

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x} - |x|}$.
  La racine du numérateur ne pose pas de problème vu que $x^2 \geqslant 0$. Reste la racine au dénominateur qui impose $x \geqslant 0$ et le dénominateur lui-même : $\sqrt{x} - |x| \neq 0$. On a :
  $$\begin{aligned} \sqrt{x} \neq |x| &\Leftrightarrow x \neq x^2 && (|x| \geqslant 0,\ \text{on ne change pas les solutions en élevant au carré.}) \\ &\Leftrightarrow \neg(x = 0 \vee x = 1) \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1 \end{aligned}$$
  Donc $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\} =]0, +\infty[\setminus \{1\}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : x \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 - |x|} & \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \\ \dfrac{1}{x} & 1 \end{pmatrix}$
  Pour que $x \in \operatorname{Dom} g$, il faut que les 4 éléments de la matrice existent, ce qui impose :
  - $x^2 - |x| \geqslant 0$
  - $x \neq 0$

► $x^2 - 3x + 2 \neq 0$

Comme le polynôme $x^2 - 3x + 2$ a pour racines 1 et 2, la troisième condition revient à $x \neq 1 \wedge x \neq 2$.

Reste la première : $x^2 \geqslant |x|$ est équivalent à $-x^2 \leqslant x$ et $x \leqslant x^2$, c'est-à-dire $x \in \,]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ et $x \in \,]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, c'est-à-dire $x \in \,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. En remettant ces conditions ensemble, on a $\operatorname{Dom} g = \,]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[\setminus \{2\}$ (peu importe le parenthèsage de cette expression, c'est toujours le même ensemble).

Question 8. *Résoudre, par la méthode de la* solution particulière, *l'équation* $x^{27} = \operatorname{cis}(3\pi/2)$.

Une solution particulière est $z_0 = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{54} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{18}$. Les solutions de $X^{27} = 1$ sont les racines 27$^{\text{e}}$ de l'unité, c'est-à-dire les $u_k = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{27}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 26\}$. Donc les solutions de l'équation sont les $z_0 \cdot u_k$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, 26\}$. Ou encore les $\operatorname{cis} \frac{(3+4k)\pi}{54}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 26\}$.

Question 9. *Prouver par l'absurde que* $1 + \boldsymbol{i}\sqrt{2}$ *ne peut pas s'obtenir comme un quotient de* $a + b\boldsymbol{i}$ *par* $c + d\boldsymbol{i}$ *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Si cela était le cas, on aurait $1 + \boldsymbol{i}\sqrt{2} = \dfrac{a + b\boldsymbol{i}}{c + d\boldsymbol{i}}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ou encore

$$1 + \boldsymbol{i}\sqrt{2} = \frac{(a + b\boldsymbol{i})(c - d\boldsymbol{i})}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \boldsymbol{i}\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Puisque $ac + bd$, $bc - ad$ et $c^2 + d^2 \in \mathbb{Z}$, on a que la partie imaginaire du second membre est un rationnel. Par l'égalité des complexes, on obtient $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit ce qui a été précédemment démontré au cours.