Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (24 octobre 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /4

- Soient $A, B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ deux matrices inversibles. Montrez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Soient $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$(M_1M_2\cdots M_n)^t = M_n^t\cdots M_2^tM_1^t \tag{1}$$

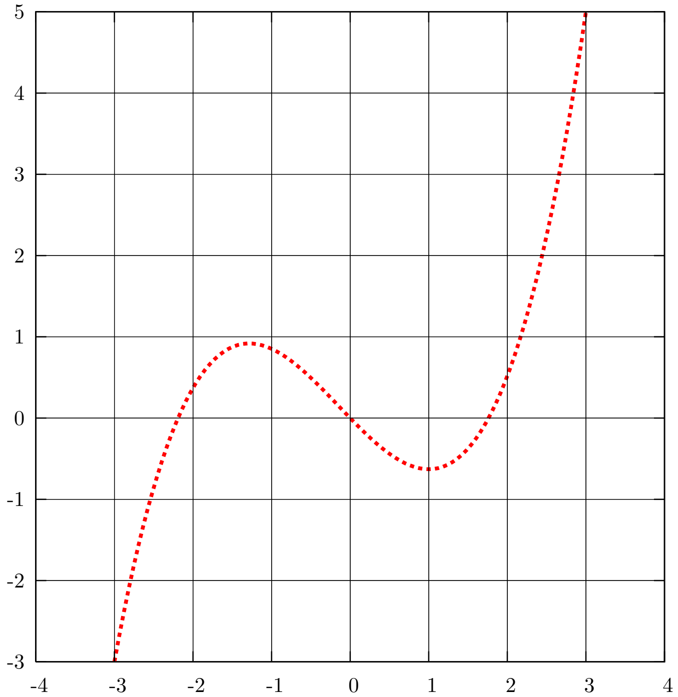
Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (24 octobre 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2$. Expliquez votre démarche. $/3$

Question 3. Soit $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Sur ce même graphique, veuillez tracer le graphe de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |f(x-1)|$. Expliquez votre construction. $/3$



Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (24 octobre 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. /10

- Prouvez, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^n) = z^{n+1}-1 \tag{2}$$

- La formule (2) est-elle encore valable si $z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (en interprétant 1 comme la matrice identité $\mathbb{1}$) ?

- Sous quelle condition a-t-on, pour $z \in \mathbb{C}$, que

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = (z-1)^{-1}(z^{n+1}-1) \text{ ?}$$

Démontrez cette formule.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite).

- Même question si $z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

- Calculez $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (24 octobre 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. On dit que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice *symétrique* si et seulement si $A^t = A$ et que A est une matrice *antisymétrique* si et seulement si $A^t = -A$. Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. /4

(a) Montrez que $S := \frac{1}{2}(M + M^t)$ est une matrice symétrique.

(b) Montrez que $N := \frac{1}{2}(M - M^t)$ est une matrice antisymétrique.

(c) Montrez que toute matrice carrée M s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Question 6. Soit $f : A \to B$ une fonction. Prouvez que l'inverse de f, s'il existe, est unique. /2

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (24 octobre 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction τ-périodique ($\tau > 0$). /6

- Montrez que f est forcément non-injective.

- Montrez que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(-x)$ est aussi τ-périodique.

- Montrez que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction σ-périodique ($\sigma > 0$) avec $\tau/\sigma \in \mathbb{Q}$, alors $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ell(x) = f(x) + h(x)$ est encore périodique.

Question 8. Calculer $\sum_{t=0}^{n} \big((1-t)(1+t)\big)$ /2

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel λ : /6

$$\begin{cases} x+\lambda y = 1 \\ \lambda x + y = 1 \\ x + 2y = \lambda - 1 \end{cases}$$