Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (24 octobre 2005)

Correction

Question 1.

- *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ deux matrices inversibles. Montrez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

  Par définition de l'inverse d'une matrice, il faut prouver que $(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = \mathbb{1}$ et $(B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = \mathbb{1}$. On a :

  $$\begin{aligned}(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) &= A\cdot(BB^{-1})\cdot A^{-1} && \text{par associativité du produit matriciel.}\\ &= A\cdot\mathbb{1}\cdot A^{-1} && \text{par définition de } B^{-1}.\\ &= AA^{-1} \\ &= \mathbb{1} && \text{par définition de } A^{-1}.\end{aligned}$$

  On démontre l'autre égalité de façon analogue.

- *Soient $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,*

  $$(M_1M_2\cdots M_n)^t = M_n^t\cdots M_2^tM_1^t \tag{1}$$

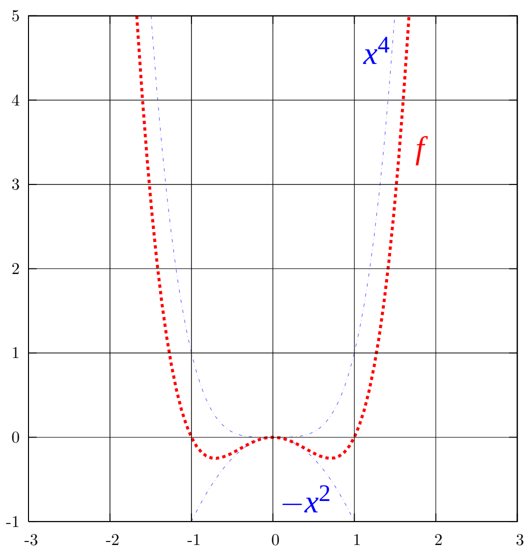
  - Cas de Base : $n = 1$. Alors le premier membre est M_1^t et le second membre est M_1^t. On a donc l'égalité entre les deux membres de (1).
  - Hypothèse d'induction : supposons qu'on ait montré (1) pour $1 \leqslant n \leqslant k$. Montrons (1) pour $n = k+1$, c'est-à-dire montrons que $(M_1M_2\cdots M_{k+1})^t = M_{k+1}^t\cdots M_2^tM_1^t$.
    On a :

    $$\begin{aligned}(M_1\cdots M_{k+1})^t &= \big((M_1\cdots M_k)\cdot M_{k+1}\big)^t && \text{associativité du produit matriciel.}\\ &= M_{k+1}^t\cdot(M_1\cdots M_k)^t && \text{propriété } (AB)^t = B^tA^t.\\ &= M_{k+1}^t\cdot(M_k^t\cdots M_1^t) && \text{hypothèse d'induction.}\\ &= M_{k+1}^tM_k^t\cdots M_1^t && \text{associativité du produit matriciel.}\end{aligned}$$

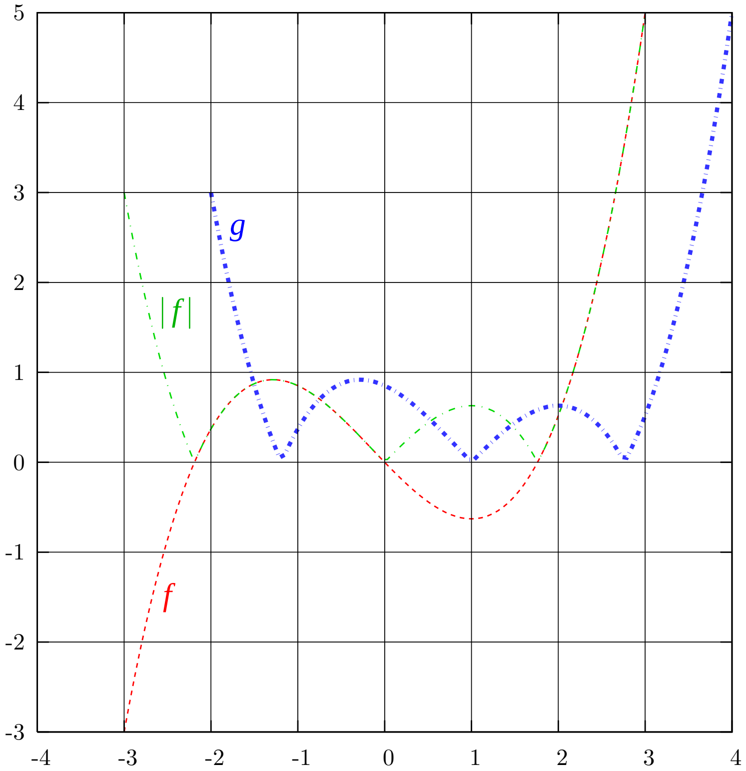
  On a donc prouvé (1) pour tout $n \geqslant 1$.

Question 2. *Esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2$. Expliquez votre démarche.*

Cette fonction est paire (car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = f(x)$), son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe des Y. Lorsque x est grand en valeur absolue, $f(x) \approx x^4$ et donc sera aussi grand et positif. Si $x \approx 0$, $f(x) \approx -x^2$, donc ressemblera à une parabole dont la concavité est dirigée vers le bas. Finalement $f(x) = x^2(x^2-1)$ et donc les seules racines de f sont $0, -1, 1$.



Question 3. *Soit $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Sur ce même graphique, veuillez tracer le graphe de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |f(x-1)|$. Expliquez votre construction.*



Commençons par tracer $h(x) := |f(x)|$. Lorsque f est positive (i.e. lorsqu'elle se trouve au dessus de l'axe des X) $h = f$. Si $f(x) \leqslant 0$, alors $h(x) = -f(x)$ et est donc le symétrique orthogonal de $f(x)$ par rapport à l'axe des X. Comme $g(x) = h(x-1)$, le graphe de g est une translation d'une unité vers la droite du graphe de h.

Question 4.

- *Prouvez, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que pour tout $z \in \mathbb{C}$*

$$(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^n) = z^{n+1}-1 \tag{2}$$

  - Cas de base : $n = 1$: à prouver que $(z-1)\cdot(1+z) = z^{1+1}-1$. C'est une formule classique.
  - Étape d'induction : supposons que la formule est correcte pour $1 \leqslant n \leqslant k$, et montrons que, sous cette hypothèse, la formule est vérifiée pour $n = k+1$:

$$\begin{aligned}(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{k+1}) &= (z-1)(1+z+\cdots+z^k)+(z-1)z^{k+1} \\ &= z^{k+1}-1+z^{k+2}-z^{k+1} \qquad \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= z^{k+2}-1\end{aligned}$$

  On a donc prouvé l'égalité pour tout naturel $n \geqslant 1$.

- *La formule (2) est-elle encore valable si $z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (en interprétant 1 comme la matrice identité $\mathbb{1}$) ?*

  Dans la preuve précédente, on n'a utilisé que les propriétés de l'addition et des puissances d'un élément, sans utilisation de la commutativité de la multiplication ; la formule reste donc valable pour $z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (ne pas oublier que $z^0 = \mathbb{1}$ si $z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$).

- *Sous quelle condition a-t-on, pour $z \in \mathbb{C}$, que*

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = (z-1)^{-1}(z^{n+1}-1) \text{ ?} \tag{3}$$

Démontrez cette formule.

De la formule (2) et du fait que $z-1$ admet un inverse à gauche, noté $(z-1)^{-1}$, on obtient la formule (3) en multipliant chaque membre de (2) par $(z-1)^{-1}$ à gauche. Dans le cas complexe, $z \in \mathbb{C}$ implique $z-1 \in \mathbb{C}$ et $z-1$ est inversible à gauche ssi $z-1 \neq 0$ (vu au cours) ou encore si $z \neq 1$. Dans le cas où $z = 1$, la formule est clairement fausse, puisque le membre de gauche vaut $n+1$ et celui de droite n'est pas défini.

- *Même question si $z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.*

Le même argument que le précédent montre que si $z-1$ a un inverse à gauche, la formule est correcte. Dans le cas où $z-1$ n'a pas d'inverse à gauche, le second membre n'est pas défini. Si le déterminant de $z-1$ est non nul, $(z-1)^{-1}$ existe et réciproquement. Donc (3) est vérifié si et seulement si $z-1$ est de déterminant différent de 0.

- *Calculez* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$

On ne peut pas appliquer le point précédent car ici $z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $z - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de déterminant nul. Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(preuve par induction sur $k \geqslant 0$, voir ci-dessous). Donc la somme demandée est

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} 1 & \sum_{k=0}^{n} k \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

Prouvons (4) par induction sur $k \geqslant 0$:

- Cas de base : $k = 0$: par définition $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$.
- Étape d'induction : supposons que le résultat esr prouvé pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$, prouvons le pour $k = \ell + 1$, sous cette hypothèse. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\ell+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\ell} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{règle d'exponentiation.} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{hypothèse d'induction.} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \ell+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{multiplication dans } \mathbb{R}^{2\times 2}.
\end{aligned}$$

Question 5. *On dit que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice* symétrique *si et seulement si $A^t = A$ et que A est une matrice* antisymétrique *si et seulement si $A^t = -A$. Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

(a) *Montrez que $S := \frac{1}{2}(M+M^t)$ est une matrice symétrique.*

Il faut montrer que $S^t = S$. Or

$$\begin{aligned} S^t &= \frac{1}{2}\big(M+M^t\big)^t \\ &= \frac{1}{2}\big(M^t+(M^t)^t\big) && \text{propriété : } (A+B)^t = A^t+B^t \\ &= \frac{1}{2}(M^t+M) \\ &= \frac{1}{2}(M+M^t) && \text{commutativité de l'addition.} \\ &= S \end{aligned}$$

(b) *Montrez que $N := \frac{1}{2}(M-M^t)$ est une matrice antisymétrique.*

Il faut prouver que $N^t = -N$. Or :

$$\begin{aligned} N^t &= \frac{1}{2}\big(M-M^t\big)^t \\ &= \frac{1}{2}(M^t-M) && \text{propriété : } (A+B)^t = A^t+B^t \\ &= -\frac{1}{2}(M-M^t) \\ &= -N \end{aligned}$$

(c) *Montrez que toute matrice carrée M s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

On a : $\frac{1}{2}(M+M^t)+\frac{1}{2}(M-M^t) = \frac{1}{2}(M+M^t+M-M^t) = M$. Donc, $M = S+N$ où $S = \frac{1}{2}(M+M^t)$ est une matrice symétrique par le premier point et $N = \frac{1}{2}(M-M^t)$ est une matrice antisymétrique par le deuxième point.

Question 6. *Soit $f : A \to B$ une fonction. Prouvez que l'inverse de f, s'il existe, est unique.*

Soit $g_1 : B \to A$ et $g_2 : B \to A$ deux inverses de f, c'est-à-dire que $g_i \circ f = \mathbb{1}_A$ et $f \circ g_i = \mathbb{1}_B$ pour $i = 1,2$. Montrons que $g_1 = g_2$. Ceci résulte du simple calcul suivant :

$$g_1 = g_1 \circ \mathbb{1}_B = g_1 \circ f \circ g_2 = \mathbb{1}_A \circ g_2 = g_2.$$

Question 7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction τ-périodique ($\tau > 0$).*

- *Montrez que f est forcément non-injective.*

  Pour cela, il faut exhiber $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Prenons par exemple $x_1 = 0$ et $x_2 = \tau$. La τ-périodicité de f implique que $f(0) = f(0+\tau) = f(\tau)$.

- *Montrez que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(-x)$ est aussi τ-périodique.*

  Il faut prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+\tau) = g(x)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la τ-périodicité de f, à savoir $\forall \xi \in \mathbb{R},\ f(\xi+\tau) = f(\xi)$, on a, en particularisant à $\xi = -x-\tau$, que $g(x) = f(-x) = f(-x-\tau+\tau) = f(-x-\tau) = g(x+\tau)$.

- *Montrez que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction σ-périodique ($\sigma > 0$) avec $\tau/\sigma \in \mathbb{Q}$, alors $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ell(x) = f(x) + h(x)$ est encore périodique.*

  On a $\frac{\tau}{\sigma} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ (il n'y a pas de restriction à supposer $a, b \geqslant 0$ car τ et σ sont positifs). Nous allons montrer que ℓ est ν-périodique avec $\nu := b\tau = a\sigma$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\ell(x+\nu) = f(x+\nu) + h(x+\nu) = f(x+b\tau) + h(x+a\sigma) = f(x) + h(x) = \ell(x)$ où on a utilisé le fait qu'une fonction τ-périodique est aussi $k\tau$-périodique avec $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ (et de même bien sûr pour la σ-périodicité).

Question 8. *Calculer* $\displaystyle\sum_{t=0}^{n} \big((1-t)(1+t)\big)$

Cette somme est égale à $\displaystyle\sum_{t=0}^{n}(1-t^2) = \sum_{t=0}^{n} 1 - \sum_{t=0}^{n} t^2 = (n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Question 9. *Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel λ :*

$$\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = 1 \\ x + 2y = \lambda - 1 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est :

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda - 1 \end{array}\right)$$

Échelonnons cette matrice :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda - 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

- Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow \frac{L_2}{1-\lambda^2}$$

  - Si $\lambda \neq 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2-\lambda}$$

    Le système est alors impossible si $\frac{1}{1+\lambda} \neq -1$, c'est-à-dire si $\lambda \neq -2$. Dans ce cas, $S = \varnothing$.
    Si $\lambda = -2$, alors on a : $y = -1$ et en remplaçant dans la première équation, on a : $x - 2(-1) = 1$, c'est-à-dire $x = -1$. Dans ce cas, $S = \{(-1,-1)\}$.
  - Si $\lambda = 2$
    Alors le système se réduit à :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

    C'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

    Donc $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$
- Si $\lambda = 1$, la matrice s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

  De la troisième ligne, on trouve $y = -1$ et en remplaçant dans l'équation $x + y = 1$ qui correspond à la première ligne, on a $x = 2$. Donc $S = \{(2,-1)\}$.
- Si $\lambda = -1$, la matrice s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

  La deuxième ligne dit que le système est impossible. On a donc $S = \varnothing$.