Mathématique Élémentaire

Examen (8 janvier 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /4

- $\displaystyle\sum_{t=0}^{n} \frac{1}{2}(t-1)$

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{5}(i^2-j^2)$

Question 2. Donnez la contraposée de la phrase suivante : « Si je rate l'examen de Mathématique Élémentaire, alors je raterai l'examen d'Analyse ». /2

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soit le plan α d'équation $\alpha \equiv -3x + 2y - z = 6$ et le point p de coordonnées $(-1, 0, 8)$. /6

(a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point p et perpendiculaire au plan α.

(b) Recherchez le point d'intersection entre la droite D et le plan α.

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Examen (8 janvier 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. /6

(a) Montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tangente à l'image de f en $f(t)$ est perpendiculaire à $f(t)$.

(b) Prouvez que $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sigma(s)$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$. Posons $g := f \circ \sigma$. Montrez que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\big(\partial_s^2 g(s) \mid g(s)\big) = -\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soient

/5

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est solution de } X^4 = -1\}$$
$$U_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est solution de } X^4 = 1\}$$
$$U_8 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est solution de } X^8 = 1\}$$

(a) Représentez graphiquement l'ensemble A.

(b) Prouvez que $U_8 = U_4 \cup A$ (sans résoudre les équations).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Écrivez l'ensemble

/6

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^2 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} \leqslant 1 \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant n}$ une matrice de type $n \times n$. On définit la trace de A, notée $\operatorname{tr} A$, par /4

$$\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par $m_{ij} = 2i - j$. Calculez la trace de la matrice S définie par $S = M^t \cdot M$.

Mathématique Élémentaire

Examen (8 janvier 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Prouver par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $/3$

$$\partial_x^k \left(\frac{1}{1+x} \right) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

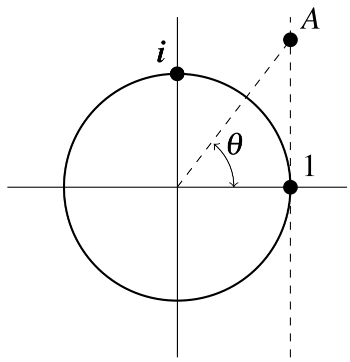
où, pour rappel, le symbole « ∂_x^k » signifie qu'on dérive l'expression k fois par rapport à x.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit A le nombre complexe représenté sur le dessin ci-contre. Calculez A. /2



Question 10. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel. /6

(a) Calculez le déterminant de A.

(b) Soit le système

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Résolvez ce système uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice A est nul. Expliquez la méthode que vous utilisez et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 11. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant 3,\ 1\leqslant j\leqslant 3}$ une matrice de type 3×3. /5

(a) Soient $i, j \in \{1,2,3\}$. Définissez le cofacteur, noté C_{ij}, associé à l'élément a_{ij}.

(b) Montrez que, si le déterminant de la matrice A est non nul, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^{t}$$

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématique Élémentaire

Examen (8 janvier 2007)

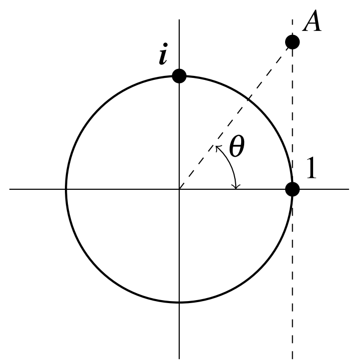
Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Cet examen comporte une partie commune avec les étudiants de BAC 1 et une partie qui vous est propre. Le poid de chacune de ces deux parties dans la note finale est de 50%.
- Les explications et justifications de vos réponses doivent être conçues comme destinées à vos (futurs) élèves de secondaire. Nous vous recommendons d'êtres attentifs à ce point. Ceci ne doit cependant pas être utilisé comme excuse pour dire les choses uniquement intuitivement ou pour manquer de précision ou de rigeur.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit A le nombre complexe représenté sur le dessin ci-contre. Calculez A. /2



Mathématique Élémentaire

Examen (8 janvier 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Question 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. /6

(a) Montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tangente à l'image de f en $f(t)$ est perpendiculaire à $f(t)$.

(b) Prouvez que $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sigma(s)$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$. Posons $g := f \circ \sigma$. Montrez que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\big(\partial_s^2 g(s) \bigm| g(s)\big) = -\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2$$

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 3. Soient

/5

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est solution de } X^4 = -1\}$$
$$U_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est solution de } X^4 = 1\}$$
$$U_8 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est solution de } X^8 = 1\}$$

(a) Représentez graphiquement l'ensemble A.

(b) Prouvez que $U_8 = U_4 \cup A$ (sans résoudre les équations).

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrégation math

Question 4. Écrivez l'ensemble

/6

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^2 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} \leqslant 1 \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Question 5. Prouver par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, /3

$$\partial_x^k \left(\frac{1}{1+x} \right) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

où, pour rappel, le symbole « ∂_x^k » signifie qu'on dérive l'expression k fois par rapport à x.

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 6. Prouvez que $\sum_{\ell=0}^{n-1} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) = 0$ si $n \bmod 4 \neq 0$. Pouvez-vous expliquer pourquoi la condition « $n \bmod 4 \neq 0$ » est-elle introduite ? /4

Mathématique Élémentaire

Examen (8 janvier 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{Dom} f$.

/10

(a) Définissez, en termes de ε-δ, « f est continue en a ».

(b) Définissez, en termes de limites, « f est continue en a ».

(c) Montrez que les définitions données en (a) et (b) sont équivalentes.

(d) Prouvez que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est continue en 1 à partir d'une des définitions (a) ou (b). Aucun résultat n'est supposé connu.

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. $/7$

(a) Quel est le domaine de f^{-1} ?

(b) Prouvez que si f est continue en a, alors f^{-1} est continue en $f(a)$.

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 9. À la question « Prouvez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ », un étudiant donne la réponse suivante : /5

<u>Cas initial</u> : $n = 1$

$$\begin{aligned} 1^2 &= \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \\ 1 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \\ 1 &= 1 \quad OK \end{aligned}$$

<u>Étape de récurrence</u>

Supposons que cette propriété est vraie pour tout $n \leqslant k$ ($k \geqslant 1$). Montrons que cette propriété est encore vraie pour $n = k+1$. On a donc :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 && \textit{hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} && \textit{mise au même dénominateur} \\ &= \frac{(k+1)\big(k(2k+1) + 6(k+1)\big)}{6} && \textit{mise en évidence de } k+1 \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} && \textit{par distribution} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} && 2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} && \textit{on a donc bien l'égalité} \end{aligned}$$

Pensez-vous que cette réponse est correcte ou qu'elle ne l'est pas ? Quelle(s) remarque(s) feriez vous à l'étudiant qui l'a écrite (pour souligner ses succès ainsi que pour l'aider à s'améliorer) ? Veillez à la qualité de votre réponse. (Vous pouvez aussi annoter la réponse de l'étudiant.)

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 10. À la question « Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction différentiable et inversible telle que son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto f^{-1}(s)$ soit aussi différentiable. Donnez et prouvez une formule qui exprime $\partial_s f^{-1}(s)$ en fonction de $\partial_t f(t)$ pour un t bien choisi. », un étudiant donne la réponse suivante : /5

> *On prend un $a \in \mathbb{R}$. On a*
>
> $$\begin{aligned} f(a)f^{-1}(a) = a &\Leftrightarrow \partial\big(f(a)f^{-1}(a)\big) = \partial a \\ &\Leftrightarrow f'(a)f^{-1}(a) + f^{-1\prime}(a)f(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial f^{-1}(a) = \frac{-\partial f(a)f^{-1}(a)}{f(a)} \\ &\Leftrightarrow \partial f^{-1}(s) = \frac{-\partial f(t)f^{-1}(s)}{f(t)} \end{aligned}$$

Pensez-vous que cette réponse est correcte ou qu'elle ne l'est pas ? Quelle(s) remarque(s) feriez vous à l'étudiant qui l'a écrite (pour souligner ses succès ainsi que pour l'aider à s'améliorer) ? Veillez à la qualité de votre réponse.