Mathématique Élémentaire

Examen

(1^{er} juin 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez la table de vérité de /2

$$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \Rightarrow B.$$

Mathématique Élémentaire

Examen (1er juin 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soit le nombre complexe $z = -3+3\boldsymbol{i}$. /5

(a) Donnez la forme trigonométrique de z.

(b) Déterminez la forme trigonométrique du nombre complexe u tel que

$$u \cdot z = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

(c) Écrivez u sous la forme $a+b\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez l'argument du conjugué de u.

(e) Calculez $u\overline{u}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. /5

(a) Définissez l'inverse de A.

(b) Supposons que $\det A \neq 0$. En utilisant la définition précédente, montrez que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(c) Calculez, s'il existe, l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Mathématique Élémentaire

Examen (1er juin 2007)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. /6

(a) Montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tangente à l'image de f en $f(t)$ est perpendiculaire à $f(t)$.

(b) Prouvez que $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sigma(s)$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$. Posons $g := f \circ \sigma$. Montrez que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\big(\partial_s^2 g(s) \mid g(s)\big) = -\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. /4

(a) Soit $v \in \mathbb{R}^N$ un vecteur non nul. Posons $u = \dfrac{v}{\|v\|}$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$. Montrez que $\|u\| = 1$. Énoncez les propriétés que vous utilisez.

(b) Soit $v = (3,4)$. Construisez un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|u\| = 1$, u a la même direction et le même sens que v. Expliquez votre démarche.

Question 6. Prouvez que $\sqrt[6]{3} \notin \mathbb{Q}$, sachant que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. /3

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x+6y+3z=7$, et passant par $(2,-1,4)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs. /4

Question 8. Calculez $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(in+j)$. /3

Mathématique Élémentaire

Examen (1er juin 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par

$$m_{ij} = (i^2 - j^2)(i+j)^3$$

- Montrez que la matrice M est antisymétrique.
- Utilisez le point précédent pour calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}$$

Expliquez votre démarche.

/3

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /6

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Écrivez l'ensemble $\Sigma := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < x\}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (éventuellement non-bornés). Moins il y a d'intervalles, mieux c'est.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. /3

- Calculez $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Calculez $\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$.

Question 12. Prouvez par récurrence que /4

$$\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2} \qquad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13.

/4

(a) Trouvez la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) En utilisant le point précédent, résolvez le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = -14 \\ x + z = 7 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.