Mathématique Élémentaire

Examen (1er juin 2007) **Correction**

Question 1. *Donnez la table de vérité de*

$$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \Rightarrow B. \tag{1}$$

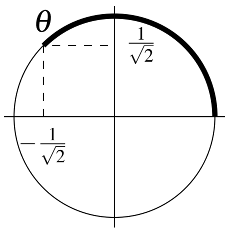
A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$	(1)
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

REMARQUE : Vu que la colonne (1) est remplie uniquement de 1, la proposition (1) est une tautologie. On peut s'en rendre facilement compte intuitivement car la prémisse de l'implication dit qu'on a A et B, ou B et C ; donc, dans tous les cas, on a au moins B.

Question 2. *Soit le nombre complexe $z = -3 + 3\boldsymbol{i}$.*

(a) Donnez la forme trigonométrique de z.

On demande d'écrire z sous la forme $r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On a que $r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ et $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\theta = \frac{3\pi}{4}$. En conclusion $z = 3\sqrt{2}\big(\cos\frac{3\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{3\pi}{4}\big)$.



(b) Déterminez la forme trigonométrique du nombre complexe u tel que

$$u \cdot z = 6\sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{12} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{12}\Big).$$

On a que $u = z^{-1}\big(\cos\frac{7\pi}{12} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{12}\big)$. On sait que si $z = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ alors $z^{-1} = r^{-1}\big((\cos(-\theta) + \boldsymbol{i}\sin(-\theta)\big)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big) + \boldsymbol{i}\sin\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)\Big)6\sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{12} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{12}\Big) \\
&= 2\Big(\cos\Big(\frac{7\pi}{12} - \frac{3\pi}{4}\Big) + \boldsymbol{i}\sin\Big(\frac{7\pi}{12} - \frac{3\pi}{4}\Big)\Big) && \text{(formule de Moivre)} \\
&= 2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + \boldsymbol{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big) \\
&= 2\Big(\cos\frac{11\pi}{6} + \boldsymbol{i}\sin\frac{11\pi}{6}\Big) && \text{(réduction à } [0, 2\pi[)
\end{aligned}$$

(c) Écrivez u sous la forme $a+b\boldsymbol{i}$.

Il suffit de continuer le calcul précédent :

$$u = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{-1}{2}\Big) = \sqrt{3} - \boldsymbol{i}$$

(d) Donnez l'argument du conjugué de u.

$$\arg \overline{u} = (-\arg u) \bmod 2\pi = \frac{-11\pi}{6} \bmod 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

(e) Calculez $u\overline{u}$.

$u\overline{u} = |u|^2 = 2^2 = 4$ (le module de u se lit sur sa forme trigonométrique).

Question 3. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.*

(a) Définissez l'inverse de A.

L'inverse de la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est la matrice $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que

$$AB = \mathbb{1} \quad \text{et} \quad BA = \mathbb{1} \tag{2}$$

REMARQUE : On montre que, si B existe, il est unique. C'est pourquoi on peut parler de *la* matrice inverse.

(b) Supposons que $\det A \neq 0$. *En utilisant la définition précédente, montrez que*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Il faut vérifier les deux inégalités de (2) :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Calculez, s'il existe, l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Comme $\det M = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \neq 0$, on peut appliquer la formule donnée au point (b), ce qui donne :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & -\operatorname{sh} x \\ -\operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$$

Question 4. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

(a) *Montrez que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *la tangente à l'image de* f *en* $f(t)$ *est perpendiculaire à* $f(t)$.

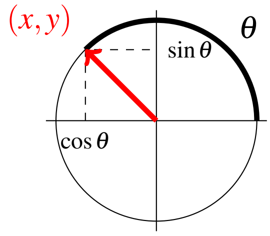
Rappelons que la tangente à l'*image* de f au point $f(t)$ possède $\partial_t f(t)$ comme vecteur directeur. Par conséquent, montrer que la tangente est perpendiculaire à $f(t)$ revient à montrer que $\partial_t f(t)$ est perpendiculaire à $f(t)$, i.e. $\big(\partial_t f(t) \big| f(t)\big) = 0$. Comme $\partial_t f(t) = (-\sin t, \cos t)$, on a bien que

$$\big(\partial_t f(t) \big| f(t)\big) = \big((-\sin t, \cos t) \big| (\cos t, \sin t)\big) = -\sin t \cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t = 0$$

(b) *Prouvez que* $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Notons $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Commençons par prouver que $\operatorname{Im} f \subseteq C$. Si $(x,y) \in \operatorname{Im} f$, alors, par définition de l'image de f, $(x,y) = f(t) = (\cos t, \sin t)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ et donc $(x,y) \in C$.

Inversement, si $(x,y) \in C$, on doit prouver que $(x,y) \in \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire que $(x,y) = (\cos t, \sin t)$ pour un $t \in \mathbb{R}$. Or C est l'ensemble des points dont la distance à l'origine vaut 1. Autrement dit, C est le cercle unité. Or, par définition[1] géométrique du sinus et cosinus, tout point $(x,y) \in C$ peut s'écrire comme $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ l'angle entre (x,y) et l'axe des x.



(c) *Soit* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sigma(s)$ *une fonction deux fois différentiable sur* $\mathbb{R}$. *Posons* $g := f \circ \sigma$. *Montrez que, quel que soit* $s \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\big(\partial_s^2 g(s) \big| g(s)\big) = -\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2$$

Il faut commencer par calculer les dérivées premières et seconde de g. Comme g est la composée de f et de σ, on doit bien entendu utiliser la formule de dérivation des fonctions composées. Celle-ci donne (c'est le moment d'aller revoir cette formule !) :

$$\begin{aligned} \partial_s g(s) &= \partial_t f(\sigma(s)) \cdot \partial_s \sigma(s) \\ \partial_s^2 g(s) &= \partial_s\big(\partial_t f(\sigma(s))\big) \cdot \partial_s \sigma(s) + \partial_t f(\sigma(s)) \cdot \partial_s^2 \sigma(s) \qquad \text{(dérivation d'un produit)} \\ &= \partial_t^2 f(\sigma(s)) \cdot \big(\partial_s \sigma(s)\big)^2 + \partial_t f(\sigma(s)) \cdot \partial_s^2 \sigma(s) \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire (il faut se rendre compte que $\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2$ et $\partial_s^2 \sigma(s)$ sont des quantités scalaires),

$$\big(\partial_s^2 g(s) \big| g(s)\big) = \big(\partial_t^2 f(\sigma(s)) \big| f(\sigma(s))\big) \cdot \big(\partial_s \sigma(s)\big)^2 + \big(\partial_t f(\sigma(s)) \big| f(\sigma(s))\big) \cdot \partial_s^2 \sigma(s) \qquad (3)$$

Comme nous ne connaissons pas σ, nous ne pouvons aller plus loin dans le calcul des dérivées $\partial_s \sigma$ et $\partial_s^2 \sigma$. Pour f, par contre, on a

$$\partial_t f(t) = (-\sin t, \cos t) \qquad \text{et} \qquad \partial_t^2 f(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

Dès lors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\big(\partial_t f(t) \big| f(t)\big) = 0 \qquad \text{et} \qquad \big(\partial_t^2 f(t) \big| f(t)\big) = -1$$

En remplaçant dans (3), on trouve la relation désirée.

[1] Pour la même raison, on peut écrire tout nombre complexe z sous forme trigonométrique.

Question 5.

(a) *Soit $v \in \mathbb{R}^N$ un vecteur non nul. Posons $u = \dfrac{v}{\|v\|}$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$. Montrez que $\|u\| = 1$. Énoncez les propriétés que vous utilisez.*

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot v \right\| \\
&= \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| && \text{(car } \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}\text{)} \\
&= \frac{1}{\|v\|} \|v\| && \text{(car } \frac{1}{\|v\|} \geqslant 0\text{)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(b) *Soit $v = (3,4)$. Construisez un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|u\| = 1$, u a la même direction et le même sens que v. Expliquez votre démarche.*

Le fait que u a la même direction et le même sens que v signifie que $u = \lambda v$ pour un $\lambda \geqslant 0$. Comme on veut que $\|u\| = 1$, cela impose que

$$1 = \|u\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| = \lambda \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\lambda$$

si bien que $\lambda = 1/5$. Le vecteur recherché est donc $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Question 6. *Prouvez que $\sqrt[6]{3} \notin \mathbb{Q}$, sachant que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.*

Supposons au contraire que $\sqrt[6]{3} \in \mathbb{Q}$ (il s'agit donc d'une preuve par l'absurde). On peut donc écrire

$$\sqrt[6]{3} = \frac{p}{q} \qquad \text{pour certains } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^{>0}$$

Dès lors, $\sqrt{3} = (\sqrt[6]{3})^3 = \frac{p^3}{q^3} \in \mathbb{Q}$ contrairement à ce qui est affirmé.

Question 7. *Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x + 2y + 2z = -1$ et $3x + 6y + 3z = 7$, et passant par $(2, -1, 4)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Le plan α a pour équation $ax + by + cz = d$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un vecteur normal à α. Pour déterminer le vecteur (a,b,c), notons qu'il doit être parallèle aux deux plans de l'énoncé, donc être perpendiculaire à leurs vecteurs normaux :

$$\big((4,2,2)\big|(a,b,c)\big) = 0 \qquad \text{et} \qquad \big((3,6,3)\big|(a,b,c)\big) = 0$$

Ce système d'équations peut s'écrire $b = a$, $c = -3a$. Une solution non triviale, obtenue en fixant a à 1 est $(a,b,c) = (1,1,-3)$. Donc $\alpha \equiv x + y - 3z = d$. Comme $(2,-1,4) \in \alpha$, on a $2 + (-1) - 3 \cdot 4 = d$, d'où $\alpha \equiv x + y - 3z = -11$.

Question 8. *Calculez* $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(in+j)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(in+j) &= \sum_{i=0}^{n-1}\Big(in\sum_{j=1}^{n}1+\sum_{j=1}^{n}j\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\Big(in^2+\frac{n(n+1)}{2}\Big)\\
&= n^2\sum_{i=0}^{n-1}i+n\frac{n(n+1)}{2}\\
&= n^2\frac{(n-1)n}{2}+n^2\frac{n+1}{2} = \tfrac{1}{2}n^2(n^2+1)
\end{aligned}$$

Question 9. *Soit $M=(m_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$m_{ij}=(i^2-j^2)(i+j)^3$$

- *Montrez que la matrice M est antisymétrique.*

  L'antisymétrie de M signifie que, pour tout $i,j=1,\ldots,n$, $m_{ij}=-m_{ji}$. Vérifions le :

  $$-m_{ji}=-(j^2-i^2)(j+i)^3=(i^2-j^2)(i+j)^3=m_{ij}$$

- *Utilisez le point précédent pour calculer*

  $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}$$

  Expliquez votre démarche.

  La somme demandée est celle de tous les éléments de la matrice M. Comme M est antisymétrique, cette somme est nulle car les éléments symétriques par rapport à la diagnale de M se compensent. Détaillons :

  $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}=\sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}m_{ij}=\sum_{i,j:i<j}m_{ij}+\sum_{i,j:i=j}m_{ij}+\sum_{i,j:i>j}m_{ij}$$

  On sait que $m_{ii}=-m_{ii}$ et donc que $m_{ij}=0$ lorsque $i=j$, et $m_{ji}=-m_{ij}$. Donc

  $$\begin{aligned}
  \sum_{i,j}m_{ij} &= \sum_{i,j:i<j}m_{ij}-\sum_{i,j:i>j}m_{ji}\\
  &= \sum_{i,j:i<j}m_{ij}-\sum_{j,i:j>i}m_{ij} \qquad \text{(renommage de } i \text{ en } j \text{et vice versa dans la 2}^{\text{e}}\text{ somme)}\\
  &= 0
  \end{aligned}$$

Question 10. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Écrivez l'ensemble $\Sigma := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < x\}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (éventuellement non-bornés). Moins il y a d'intervalles, mieux c'est.

Nous devons donc résoudre l'inéquation $f(x) < x$. Nous allons transformer cette inéquation en distinguant différents cas selon que $x \geqslant 0$ ou $x < 0$.

- Pour les $x \geqslant 0$, l'inéquation s'écrit $\sqrt{x} < x$. Comme les quantités de chaque coté de l'inégalité sont positives, celle-ci est *équivalente* à $x = (\sqrt{x})^2 < x^2$ ou encore à $x^2 - x > 0$. Le tableau des signes du polynôme $x^2 - x$ est

x		0		1	
$x^2 - x$	$+$	0	$-$	0	$+$

  Comme nous ne nous intéressons qu'aux $x \geqslant 0$, les solutions sont les $x \in \left]1, +\infty\right[$.

- Pour les $x < 0$, l'inéquation devient $-x^2 < x$ ou encore $x^2 + x > 0$. On regarde le tableau des signes de $x^2 + x$:

x		-1		0	
$x^2 + x$	$+$	0	$-$	0	$+$

  Les solutions $x \in \left]-\infty, 0\right[$ sont les $x \in \left]-\infty, -1\right[$.

Au final, l'ensemble Σ des solutions de l'inéquation est l'union des solutions positives et des solutions négatives, à savoir $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

Question 11.

- *Calculez* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Il suffit d'appliquer la définition de multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Calculez* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$.

  On commence par prouver par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Pour $k = 0$, on a bien que $\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Supposons que ce soit vrai pour k et montrons le pour $k+1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{(par le 1}^{\text{er}}\text{ point)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^k = \sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^n 1 & \sum_{k=1}^n 2k\\ \sum_{k=1}^n 0 & \sum_{k=1}^n 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n & n(n+1)\\ 0 & n\end{pmatrix}$$

Question 12. *Prouvez par récurrence que*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2} \qquad \text{pour } n \geqslant 1. \tag{4}$$

- Commençons par le cas de base $n = 1$:

$$1 = \sum_{i=1}^{1} i = \binom{1+1}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$$

- Supposons maintenant que (4) soit vraie pour tout $n \leqslant k$ et montrons qu'elle reste vraie pour $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + k + 1 & \\
&= \binom{k+1}{2} + k + 1 & \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= \binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{1} & \left(\text{car } \binom{p}{1} = \frac{p!}{1!(p-1)!} = p\right)\\
&= \binom{k+2}{2} & \text{(règle sur les coefficients binomiaux)}
\end{aligned}$$

Question 13.

(a) Trouvez la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

On va inverser M^{-1} par la méthode de la matrice compagnon afin de trouver $M = (M^{-1})^{-1}$:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}L_2 \leftrightarrow L_1\\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}L_2 \leftrightarrow L_3\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}L_3 \leftarrow L_3/(-7)\\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3\\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{8}{7} & \frac{-2}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{3}{7}\\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix} = M$$

(b) *En utilisant le point précédent, résolvez le système*

$$\begin{cases}3x + 2y = -14\\ x + z = 7\\ 2x + y + 4z = 0\end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

Le système peut s'écrire

$$M^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\ 7\\ 0\end{pmatrix}$$

Par conséquent, en multipliant les deux membres par M, on obtient la solution :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}-14\\ 7\\ 0\end{pmatrix} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 8 & -2\\ 2 & -12 & 3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-14\\ 7\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 8 & -2\\ 2 & -12 & 3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ -16\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$