Mathématique Élémentaire

Nom :
Prénom :
Section :

Examen (20 août 2007)

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculer $\partial_u\big(\mathrm{e}^{xu+u^2}, \ln\cos^2(xu), u^u\big)$ /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. La proposition suivante est-elle une tautologie ? /2

$$A \Rightarrow (A \vee B) \wedge (C \vee A)$$

Justifiez votre réponse par la méthode de votre choix.

Question 3. Calculez, en explicitant vos calculs : /4

- $\sum_{u=0}^{\ell} (u+1)$

- $\sum_{n=2}^{t} 2$

- $\sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} (u-v)^2$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit le plan α d'équation $\alpha \equiv 2x - 3y - z = -6$ et le point p de coordonnées $(0, 1, -8)$. /6

(a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point p et perpendiculaire au plan α.

(b) Recherchez le point d'intersection entre la droite D et le plan α.

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Démontrez par récurrence sur la dimension n de la matrice que /5

$$V(x_1,\dots,x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$$

INDICATION 1 : Utilisez les opérations élémentaires et le fait que, quel que soit $X \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}$, $X^j - x_1 X^{j-1} = X^{j-1}(X - x_1)$.

INDICATION 2 : Pour rappel, la notation $\prod$ désigne le produit ; par exemple :

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4} (x_j - x_i) = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

Mathématique Élémentaire

Examen (20 août 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Répondez aux questions suivantes en justifiant *brièvement* votre réponse. /6

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ les droites $D_1 \equiv y - \lambda x = 2$ et $D_2 \equiv y = -2\lambda x - 5$ sont-elles perpendiculaires ?

(b) Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont le déterminant vaut r. Que vaut le déterminant de la matrice $B := 3A$?

(c) Soit le système $Ax = 0$ où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Supposons que $\det A = 0$. Combien de solution(s) ce système possède-t-il ?

(d) Soient les droites $D_1 \equiv a_1x + b_1y = c_1$ et $D_2 \equiv a_2x + b_2y = c_2$. Quelle(s) condition(s) faut-il imposer à $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ pour que ces deux droites soient parallèles ?

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 7. Écrivez l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^2 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} \leqslant 1 \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\boldsymbol{i}+1$ est-il racine de $3x^2-4\boldsymbol{i}x+2\boldsymbol{i}-4=0$? Justifiez.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si l'argument de z est θ, l'argument de $\boldsymbol{i}z$ est-il $\theta+\frac{\pi}{2}$? Justifiez.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Est-il vrai que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z^{-1}=\bar{z}$? Justifiez.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{3}$ est-il la forme trigonométrique de $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$? Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9.

/6

(a) Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « N est l'inverse de M ».

(b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Donnez alors l'inverse de A. Vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & \lambda \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice S est-elle égale à son inverse ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Examen (20 août 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. /6

(a) Montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tangente à l'image de f en $f(t)$ est perpendiculaire à $f(t)$.

(b) Prouvez que $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sigma(s)$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$. Posons $g := f \circ \sigma$. Montrez que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\big(\partial_s^2 g(s) \mid g(s)\big) = -\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2.$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 11. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Trouvez tous les $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que la tangente au graphe de f en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ne soit pas horizontale et coupe l'axe des x en $x_0 + 1$. $/4$

Question 12. $/4$

(a) Trouvez la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En utilisant le point précédent, résolvez le système

$$\begin{cases} 3y + 2z = -14 \\ x + y = 0 \\ 4x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.