Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez : /4

- $\sum_{s=-3}^{t} (\pi + s - t)$

- $\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=i}^{2i} i$

Question 2. Donnez la négation de la phrase suivante : « Si je parviens à résoudre tous les exercices du syllabus, alors je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire. ». /2

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soient les ensembles

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \text{ est une solution de l'équation } Z^7 = 1 + 2\boldsymbol{i} \right\}$$
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \text{ est une solution de l'équation } Z^{14} = -3 + 4\boldsymbol{i} \right\}$$

Montrez, sans résoudre les équations, que $A \subseteq B$.

/4

Question 4. Calculez $\partial_t \left(\mathrm{e}^{t^4 - t^2}, \sqrt{\dfrac{\sin t}{t}}, \ln\left(\arccos t^3\right) \right)$.

/4

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit l'équation

$$Z^4 = -119 + 120\boldsymbol{i} \tag{1}$$

/5

(a) Montrez que $3 + 2\boldsymbol{i}$ est solution de (1).

(b) Calculez toutes les solutions de (1) sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Détaillez votre raisonnement et vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x^3, x^2, x)$. Pour quelle(s) valeur(s) de x la tangente à $\mathrm{Im}\, f$ est-elle parallèle au plan α d'équation $2x + 3y - z = 7$? $/4$

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et impaire (c'est-à-dire qui satisfait $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Prouvez que les tangentes au graphe de f en x_0 et $-x_0$ sont parallèles quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $/4$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8.

/3

(a) Dites si la proposition $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$ est une tautologie.

(b) Donnez une formule équivalente à $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$ n'utilisant que les connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ /8

(a) Calculez A^2 et A^3.

(b) Donnez une formule pour A^n, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et prouvez la par récurrence.

(c) Calculez $\sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$. Expliquez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soient le point $p = (2, -1, 4)$, la droite $D \equiv x + 3 = 2 - y = \frac{2z+1}{3}$, et le plan $\gamma \equiv x - z = 5$. Recherchez une équation cartésienne du plan α passant par p, parallèle à D et perpendiculaire à γ. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

/4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Écrivez l'ensemble

/6

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x - \sqrt{5}}{\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{5}} \leqslant 1 \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Nom :
Prénom :
Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 12. Soit la matrice /3

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Calculez $A^t A$.

(b) Du point précédent, déduisez A^{-1}. Expliquez votre démarche.

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 13. Répondez aux questions suivantes en justifiant *brièvement* votre réponse. /6

(a) Soit le système $Ax = 0$ où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Supposons que $\det A = 0$. Combien de solution(s) ce système possède-t-il ?

(b) Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont le déterminant vaut r. Que vaut le déterminant de la matrice $B := 3A$?

(c) Soient les droites $D_1 \equiv a_1x + b_1y = c_1$ et $D_2 \equiv a_2x + b_2y = c_2$. Quelle(s) condition(s) faut-il imposer à $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ pour que ces deux droites soient parallèles ?

(d) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ les droites $D_1 \equiv y - \lambda x = 2$ et $D_2 \equiv y = -2\lambda x - 5$ sont-elles perpendiculaires ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 14. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont des paramètres. Pour quelle(s) valeur(s) de a, b, c, d le graphe de f passe-t-il par les points $(4, -14)$, $(3, -11)$, $(1, 7)$ et $(0, 10)$? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

$/5$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 15.

/6

(a) Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « N est l'inverse de M ».

(b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Donnez alors l'inverse de A. Vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice S est-elle égale à son inverse ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Cet examen comporte une partie commune avec les étudiants de BAC 1 et une partie qui vous est propre. Le poid de chacune de ces deux parties dans la note finale est de 50%.
- Les explications et justifications de vos réponses doivent être conçues comme destinées à vos (futurs) élèves de secondaire. Nous vous recommendons d'êtres attentifs à ce point. Ceci ne doit cependant pas être utilisé comme excuse pour dire les choses uniquement intuitivement ou pour manquer de précision ou de rigueur.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez $\partial_t\Big(\mathrm{e}^{t^4-t^2}, \sqrt{\dfrac{\sin t}{t}}, \ln\big(\arccos t^3\big)\Big)$. /4

Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Question 2. Soient les ensembles /4

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de l'équation } Z^7 = 1 + 2\boldsymbol{i} \right\}$$
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de l'équation } Z^{14} = -3 + 4\boldsymbol{i} \right\}$$

Montrez, sans résoudre les équations, que $A \subseteq B$.

Question 3. Donnez la négation de la phrase suivante : « Si je parviens à résoudre tous les exercices du syllabus, alors je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire. ». /2

Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Question 4. Soit l'équation

$$Z^4 = -119 + 120\boldsymbol{i} \tag{1}$$

/5

(a) Montrez que $3 + 2\boldsymbol{i}$ est solution de (1).

(b) Calculez toutes les solutions de (1) sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Détaillez votre raisonnement et vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section : Agrégation math	

Question 5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ /8

(a) Calculez A^2 et A^3.

(b) Donnez une formule pour A^n, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et prouvez la par récurrence.

(c) Calculez $\sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$. Expliquez.

Nom :	
Prénom :	
Section : Agrégation math	

Question 6. Répondez aux questions suivantes en justifiant *brièvement* votre réponse. /6

(a) Soit le système $Ax = 0$ où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Supposons que $\det A = 0$. Combien de solution(s) ce système possède-t-il ?

(b) Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont le déterminant vaut r. Que vaut le déterminant de la matrice $B := 3A$?

(c) Soient les droites $D_1 \equiv a_1x + b_1y = c_1$ et $D_2 \equiv a_2x + b_2y = c_2$. Quelle(s) condition(s) faut-il imposer à $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ pour que ces deux droites soient parallèles ?

(d) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ les droites $D_1 \equiv y - \lambda x = 2$ et $D_2 \equiv y = -2\lambda x - 5$ sont-elles perpendiculaires ?

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 7. Écrivez l'ensemble /6

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x - \sqrt{5}}{\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{5}} \leqslant 1 \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 8. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont des paramètres. Pour quelle(s) valeur(s) de a, b, c, d le graphe de f passe-t-il par les points $(4, -14)$, $(3, -11)$, $(1, 7)$ et $(0, 10)$? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs. /5

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Agrégation math

Partie spécifique aux étudiants de l'agrégation.

Question 9. À la question « Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supposons que B soit une matrice inversible. Montrez que $AB^{-1} = B^{-1}A$ si et seulement si $AB = BA$. », un étudiant donne la réponse suivante : /5

($\Leftarrow$) Supposons que $AB = BA$ et montrons que $AB^{-1} = B^{-1}A$.

$$\begin{array}{llll} AB = BA \quad \text{et} \quad BB^{-1} = \mathbb{1} & & & \\ & \underline{AB}B^{-1} = A & \quad \text{et} \quad & BB^{-1}A = A \\ & BAB^{-1} = A & & B^{-1}\underline{BA} = A \\ & \text{car } AB = BA & & B^{-1}AB = A \end{array}$$

Donc $AB^{-1} = B^{-1}A$.

($\Rightarrow$) Supposons que $AB^{-1} = B^{-1}A$ et montrons que $AB = BA$.

$$\begin{array}{llll} AB^{-1} = B^{-1}A \quad \text{et} \quad BB^{-1} = \mathbb{1} & & & \\ & ABB^{-1} = A & \quad \text{et} \quad & B^{-1}BA = A \\ & \underline{AB^{-1}}B = A & & B\underline{B^{-1}A} = A \\ & B^{-1}AB = A & & BAB^{-1} = A \end{array}$$

Donc $AB = BA$.

Pensez-vous que cette réponse est correcte ou qu'elle ne l'est pas ? Quelle(s) remarque(s) feriez vous à l'étudiant qui l'a écrite (pour souligner ses succès ainsi que pour l'aider à s'améliorer) ? Veillez à la qualité de votre réponse.

Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Question 10. À la question « Soit $w \in \mathbb{C}$ et soit α une solution de $X^n = w$. Prouvez que toute solution de $X^n = w$ est le produit de α avec une solution de $X^n = 1$. », un étudiant donne la réponse suivante : /5

Soit α une solution de $X^n = w$, c'est-à-dire que $\alpha^n = w$.
Soit β une solution de $X^n = 1$, c'est-à-dire que $\beta^n = 1$.
Il faut prouver que $\alpha \cdot \beta$ est une solution de $X^n = w$.
Cela revient à dire que $(\alpha \cdot \beta)^n = w$.
Par la règle des exposants, cela devient $\alpha^n \beta^n = w$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Or } \alpha^n \text{ est solution de } X^n = w \\ \text{et } \beta^n \text{ est solution de } X^n = 1\end{array}\right\} \textit{par hyp.}$$

Donc $\alpha^n \beta^n = w \cdot 1 = w$.

On a donc que toute solution de $X^n = w$ est le produit de α avec une solution de $X^n = 1$.

Pensez-vous que cette réponse est correcte ou qu'elle ne l'est pas ? Quelle(s) remarque(s) feriez vous à l'étudiant qui l'a écrite (pour souligner ses succès ainsi que pour l'aider à s'améliorer) ? Veillez à la qualité de votre réponse.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrégation math

Question 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{Dom} f$. /10

(a) Définissez, en termes de ε-δ, « f est continue en a ».

(b) Soit $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{>0}$. La formule

$$\forall \varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0],\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f \cap [a - \delta, a + \delta],\ f(x) \in [f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon] \qquad (2)$$

est-elle équivalente à celle que vous avez donnée en (a) ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

Nom :
Prénom :
Section : Agrégation math

Question 11 (suite).

(c) Soit $\delta_0 \in \mathbb{R}^{>0}$. La formule

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta : 0 < \delta < \delta_0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f,\ |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

est-elle équivalente à celle que vous avez donnée en (a) ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrégation math

/8

Question 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

(a) Cette fonction est-elle continue sur son domaine ?

(b) Cette fonction est-elle dérivable sur son domaine ?

Expliquez votre démarche et justifiez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 12 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 13. Un étudiant a écrit sur sa copie que « $\sqrt{2} = 1{,}41$ ». Pensez-vous que cette affirmation est correcte ou qu'elle ne l'est pas ? Quelle(s) remarque(s) feriez vous à l'étudiant qui l'a écrite ? Veillez à la qualité de votre réponse. /2

Question 14. On considère un miroir M d'équation $y = ax + b$. Un rayon lumineux se réfléchit sur ce miroir de telle manière que l'angle d'incidence α soit égal à l'angle de réflection β (voir figure 1). Si un rayon R d'équation $x = \gamma$ arrive verticalement sur M, alors le rayon réfléchi $\tilde{R}$ a pour équation

/10

$$\tilde{R} \equiv y = a\gamma + b + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\right)(x - \gamma). \tag{3}$$

De manière plus générale, un rayon se réfléchira sur un miroir quelconque en suivant la même loi à condition de mesurer les angles d'incidence et de réflection par rapport à la tangente au miroir au point de réflection, comme le montre la figure 2.

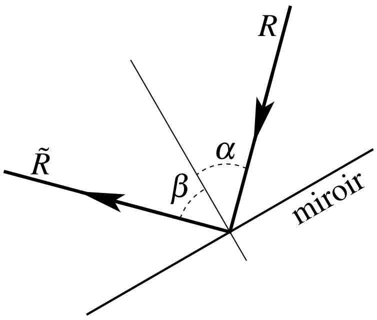

FIG. 1 – Miroir plan

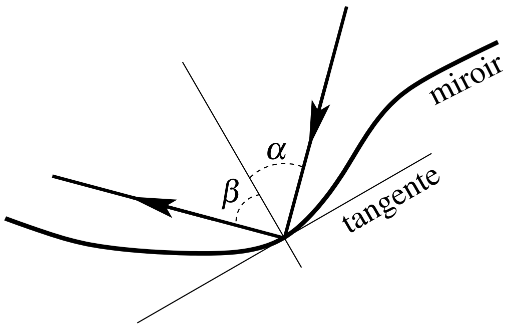

FIG. 2 – Miroir quelconque

À partir des considérations ci-dessus, montrez que les rayons lumineux arrivant sur un miroir parabolique parallèlement à son axe de symétrie passent tous après réflection par un même point (voir figure 3) et déterminez ce point (qui est appelé *foyer* du miroir).

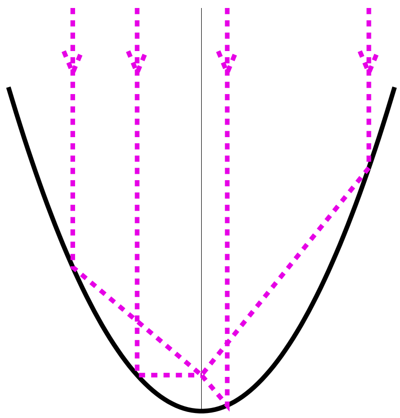

FIG. 3 – Miroir parabolique

Nom :

Prénom :

Section : Agrégation math

Question 14 (suite). Veuillez poursuivre votre réponse sur cette page.