Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2006) **Correction**

Question 1. *Calculez :*

- $$\begin{aligned}\sum_{s=-3}^{t}(\pi+s-t) &= \pi\sum_{s=-3}^{t}1+\sum_{s=-3}^{t}s-t\sum_{s=-3}^{t}1\\ &= \pi(t+4)+(-3)+(-2)+(-1)+\frac{t(t+1)}{2}-t(t+4)\\ &= 4\pi-6+t\,\frac{2\pi-7-t}{2}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{10}\sum_{j=i}^{2i}i &= \sum_{i=0}^{10}i(2i-i+1)=\sum_{i=0}^{10}i^2+\sum_{i=0}^{10}i\\ &= \frac{10(10+1)(2\cdot 10+1)}{6}+\frac{10(10+1)}{2}=\frac{10\cdot 11\cdot(7+1)}{2}=440\end{aligned}$$

Question 2. *Donnez la négation de la phrase suivante : « Si je parviens à résoudre tous les exercices du syllabus, alors je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire. ».*

Il s'agit d'une phrase du type $A \Rightarrow B$ avec A étant « je parviens à résoudre tous les exercices du syllabus » et B étant « je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire ». Sa négation est donc $\neg(A \Rightarrow B)$ ou encore $A \wedge \neg B$, ce qui se dit en bon français : « Je suis parvenu à résoudre tous les exercices du syllabus et pourtant j'ai raté l'examen de Mathématique Élémentaire. ».

Question 3. *Soient les ensembles*

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \text{ est une solution de l'équation } Z^7 = 1+2\boldsymbol{i}\right\}$$
$$B = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \text{ est une solution de l'équation } Z^{14} = -3+4\boldsymbol{i}\right\}$$

Montrez, sans résoudre les équations, que $A \subseteq B$.

Il faut montrer que, quel que soit le $z \in A$ qu'on prend, ce z appartient bien à B.
Soit $z \in A$ arbitraire. Par définition de l'ensemble A, on sait que z est une solution de l'équation $Z^7 = 1+2\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire que $z^7 = 1+2\boldsymbol{i}$. Dès lors, $z^{14} = (z^7)^2 = (1+2\boldsymbol{i})^2 = 1+4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{i}^2 = -3+4\boldsymbol{i}$. Par conséquent z est solution de l'équation $Z^{14} = -3+4\boldsymbol{i}$ et donc $z \in B$ (par définition de B).

Question 4. *Calculez* $\partial_t\Big(\mathrm{e}^{t^4-t^2}, \sqrt{\dfrac{\sin t}{t}}, \ln\big(\arccos t^3\big)\Big)$.

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big(\mathrm{e}^{t^4-t^2}, \sqrt{\frac{\sin t}{t}}, \ln\big(\arccos t^3\big)\Big)\\
&\quad= \Big(\partial_t\,\mathrm{e}^{t^4-t^2}, \partial_t\sqrt{\frac{\sin t}{t}}, \partial_t\ln\big(\arccos t^3\big)\Big) && \text{(dérivation composante par composante)}\\
&\quad= \Big(\partial_y\,\mathrm{e}^y\big|_{y=t^4-t^2}\,\partial_t(t^4-t^2), && \text{(dérivation des fonctions composées)}\\
&\qquad\quad \partial_z z^{1/2}\big|_{z=\frac{\sin t}{t}}\,\partial_t\Big(\frac{\sin t}{t}\Big),\\
&\qquad\quad \partial_u\ln u\big|_{u=\arccos t^3}\,\partial_v\arccos v\big|_{v=t^3}\,\partial_t(t^3)\Big)\\
&\quad= \Big(\mathrm{e}^{t^4-t^2}(4t^3-2t),\ \frac{t\cos t-\sin t}{2\sqrt{t^3\sin t}},\ \frac{-3t^2}{\arccos(t^3)\sqrt{1-t^6}}\Big)
\end{aligned}$$

Question 5. *Soit l'équation*

$$Z^4 = -119+120\boldsymbol{i} \tag{1}$$

(a) *Montrez que* $3+2\boldsymbol{i}$ *est solution de* (1).

Ceci se fait en montrant que $(3+2\boldsymbol{i})^4 = -119+120\boldsymbol{i}$. C'est bien le cas car

$$(3+2\boldsymbol{i})^4 = \big((3+2\boldsymbol{i})^2\big)^2 = (5+12\boldsymbol{i})^2 = 25+120\boldsymbol{i}+144\boldsymbol{i}^2 = -119+120\boldsymbol{i}$$

(b) *Calculez toutes les solutions de* (1) *sous la forme* $a+b\boldsymbol{i}$ *(*$a,b\in\mathbb{R}$*). Détaillez votre raisonnement et vos calculs.*

On possède une solution de (1). On sait par un résultat du cours que toutes les solutions de (1) sont cette solution multipliée par une solution de $Z^4=1$. Comme les solutions de $Z^4=1$ sont 1, $\boldsymbol{i}$, -1, $-\boldsymbol{i}$, les solutions de (1) sont

$$(3+2\boldsymbol{i})\cdot z \quad \text{pour } z\in\{1,\boldsymbol{i},-1,-\boldsymbol{i}\}$$

ou, en détail,

- $3+2\boldsymbol{i}$
- $(3+2\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} = -2+3\boldsymbol{i}$
- $(3+2\boldsymbol{i})(-1) = -3-2\boldsymbol{i}$
- $(3+2\boldsymbol{i})(-\boldsymbol{i}) = 2-3\boldsymbol{i}$

Question 6. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x^3, x^2, x)$. Pour quelle(s) valeur(s) de x la tangente à $\operatorname{Im} f$ est-elle parallèle au plan α d'équation $2x + 3y - z = 7$?*

La tangente à l'image de f au point $f(x)$ possède comme vecteur directeur $\partial f(x)$ (pour autant qu'il soit non-nul). Ici $\partial f(x) = (3x^2, 2x, 1)$. La tangente est parallèle à α si et seulement si $\partial f(x)$ est parallèle à α. Comme on lit sur l'équation cartésienne que $(2, 3, -1)$ est un vecteur normal à α, $\partial f(x)$ est parallèle à α si et seulement si

$$\begin{aligned}
\partial f(x) \perp (2,3,-1) \quad &\text{i.e.} \quad \big((3x^2, 2x, 1) \,\big|\, (2,3,-1)\big) = 0\\
&\text{i.e.} \quad 6x^2 + 6x - 1 = 0\\
&\text{i.e.} \quad x = \frac{-3 - \sqrt{15}}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-3 + \sqrt{15}}{6}
\end{aligned}$$

Question 7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et impaire (c'est-à-dire qui satisfait $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Prouvez que les tangentes au graphe de f en x_0 et $-x_0$ sont parallèles quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ a pour pente $\partial f(x_0)$. Similairement, la tangente au graphe de f en $(-x_0, f(-x_0))$ a pour pente $\partial f(-x_0)$. Dire que ces deux tangentes sont parallèles revient à dire que leurs pentes sont égales :

$$\partial f(x_0) = \partial f(-x_0)$$

Puisque par hypothèse les fonctions $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto -f(x)$ sont égales, leurs dérivées le sont également et donc

$$\partial_x\big(f(-x)\big) = \partial_x\big(-f(x)\big)$$

Les règles de dérivation impliquent que $\partial_x\big(-f(x)\big) = -\partial f(x)$ et $\partial_x\big(f(-x)\big) = \partial f(-x) \cdot \partial_x(-x) = -\partial f(-x)$. Donc

$$\partial f(x) = \partial f(-x) \quad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R},$$

ce qui donne le résultat voulu pour $x = x_0$.

Question 8.

(a) *Dites si la proposition $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$ est une tautologie.*

Construisons la table de vérité de la proposition $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$.

A	1				0			
B	1		0		1		0	
C	1	0	1	0	1	0	1	0
$\neg B$	0	0	1	1	0	0	1	1
$A \Leftrightarrow \neg B$	0	0	1	1	1	1	0	0
$(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$	0	0	1	0	1	0	0	0

Comme la ligne de $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$ dans la table de vérité n'est pas uniquement constituée de 1, on en déduit que la proposition $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$ n'est *pas* une tautologie.

(b) *Donnez une formule équivalente à $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$ n'utilisant que les connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Justifiez votre réponse.*

D'après la table de vérité, on a que

$$(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C \text{ est vrai} \quad \text{ssi} \quad (A \text{ vrai et } \neg B \text{ vrai et } C \text{ vrai}) \text{ ou } (\neg A \text{ vrai et } B \text{ vrai et } C \text{ vrai})$$

La proposition est donc équivalente à $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$.

Question 9. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) *Calculez A^2 et A^3.*

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) *Donnez une formule pour A^n, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et prouvez la par récurrence.*

Nous allons montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

CAS DE BASE $n = 1$: Le premier membre est $A^1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et le second membre est $\left(\begin{smallmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Les deux membres sont donc bien égaux.

PAS RÉCURSIF : Supposons qu'on ait prouvé la propriété pour tout $n \leqslant k$. Montrons la pour $n = k+1$, c'est-à-dire montrons que $A^{k+1} = \left(\begin{smallmatrix} 2^{k+1} & 2^{k+1} \\ 2^{k+1} & 2^{k+1} \end{smallmatrix}\right)$. On a

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A && \text{(règle sur les exposants)} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{k-1} & 2 \cdot 2^{k-1} \\ 2 \cdot 2^{k-1} & 2 \cdot 2^{k-1} \end{pmatrix} && \text{(par définition du produit matriciel)} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc prouvé la propriété pour tout $n \geqslant 1$.

(c) *Calculez $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$. Expliquez.*

On a :

$$\sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} & \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} \\ \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} & \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Or

$$\sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} 2^{n} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{k} 2^{n} - 1\Big) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\Big(\frac{1-2^{k+1}}{1-2} - 1\Big) = \frac{1}{2}(2^{k+1}-2) = 2^k - 1$$

où l'égalité $(*)$ résulte de $\sum_{n=0}^{k} z^k = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}$. La somme demandée est donc égale à

$$\sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^k-1 & 2^k-1 \\ 2^k-1 & 2^k-1 \end{pmatrix}$$

Question 10. *Soient le point $p = (2,-1,4)$, la droite $D \equiv x+3 = 2-y = \dfrac{2z+1}{3}$, et le plan $\gamma \equiv x-z = 5$. Recherchez une équation cartésienne du plan α passant par p, parallèle à D et perpendiculaire à γ. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Une équation cartésienne du plan α est de la forme

$$ax+by+cz = d \tag{2}$$

où (a,b,c) est un vecteur normal de α. On a que $p \in \alpha$. En remplaçant, dans (2), x par 2, y par -1 et z par 4, on a

$$2a-b+4c = d \tag{3}$$

Ensuite, on a que $D \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{2z+1}{3}$. Un vecteur directeur de D est donc $(1,-1,\frac{3}{2})$. Puisque D est parallèle à α, les vecteurs $(1,-1,\frac{3}{2})$ et (a,b,c) sont orthogonaux. On en déduit que

$$a-b+\tfrac{3}{2}c = 0 \tag{4}$$

Un vecteur normal de γ est $(1,0,-1)$. Comme $\alpha \perp \gamma$, les vecteurs $(1,0,-1)$ et (a,b,c) sont orthogonaux. Donc

$$a-c = 0 \tag{5}$$

De (5), on a $a = c$. En remplaçant dans (4), on a $b = a+\frac{3}{2}c = c+\frac{3}{2}c = \frac{5}{2}c$. En remplaçant dans (3), on a $d = 2c-\frac{5}{2}c+4c = \frac{7}{2}c$. Nous avons donc exprimé a, b, d en fonction de c. En prenant $c = 1$ par exemple (vous rappelez-vous pourquoi on peut *choisir* $c \neq 0$?), on a que $a = 1$, $b = \frac{5}{2}$ et $d = \frac{7}{2}$. Une équation cartésienne de α est donc

$$x+\tfrac{5}{2}y+z = \tfrac{7}{2}$$

Question 11. *Écrivez l'ensemble*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}} \leqslant 1\right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Il s'agit de trouver les solutions de l'inéquation

$$\frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}} \leqslant 1 \tag{6}$$

CONDITIONS D'EXISTENCE : il faut que $x^2+4x = x(x+4) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in \left]-\infty,-4\right] \cup \left[0,+\infty\right[$, et que le dénominateur soit non-nul. Comme nous aurons besoin du signe de ce dénominateur, déterminons le en même temps :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5} \gtreqless 0 \quad &\text{ssi} \quad \sqrt{x^2+4x} \gtreqless \sqrt{5} \\
&\text{ssi} \quad x^2+4x \gtreqless 5 \qquad \text{(on peut élever au carré sans changer de sens car les deux membres sont positifs)} \\
&\text{ssi} \quad x^2+4x-5 \gtreqless 0
\end{aligned}$$

Donc le signe de $\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}$ est le même que celui de x^2+4x-5, ce dernier s'obtenant facilement comme vu au cours :

x		-5		1	
$\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}$	$+$	0	$-$	0	$+$

En conclusion, les conditions d'existence sont $x \in \left(\left]-\infty,-4\right] \cup \left[0,+\infty\right[\right) \setminus \{-5,1\}$.

Pour la résolution de (6), distinguons deux cas :

- Si $x \in \left]-\infty,-5\right[\cup \left]1,+\infty\right[$, alors (6) est équivalent à

  $$x-\sqrt{5} \leqslant \sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5} \quad \text{i.e.} \quad x \leqslant \sqrt{x^2+4x}$$

  - Si $x < 0$, cette inégalité est toujours satisfaite.
  - Si $x \geqslant 0$, elle est équivalente à $x^2 \leqslant x^2+4x$ i.e. $4x \geqslant 0$ ce qui est toujours vrai sous l'hypothèse $x \geqslant 0$.

- Si $x \in \left]-5,-4\right] \cup \left[0,1\right[$ (nous avons tenu compte des conditions d'existence), (6) devient $x \geqslant \sqrt{x^2+4x}$.

  - Si $x < 0$, cette inégalité n'est jamais satisfaite.
  - Si $x \geqslant 0$, cette inégalité devient $x^2 \geqslant x^2+4x$, i.e. $4x \leqslant 0$, i.e. $x = 0$ (vu qu'on est sous l'hypothèse $x \geqslant 0$).

  Donc $x = 0 \in \left]-5,-4\right] \cup \left[0,1\right[$ est la seule solution.

En remettant les différents cas ensemble, on constate que les solution de (6) sont les $x \in \left]-\infty,-5\right[\cup \left]1,+\infty\right[\cup \{0\}$ et donc que

$$A = \left]-\infty,-5\right[\cup [0,0] \cup \left]1,+\infty\right[.$$

Question 12. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{où } a,b,c,d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(a) *Calculez A^tA.*

$$\begin{aligned} A^tA &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) *Du point précédent, déduisez A^{-1}. Expliquez votre démarche.*

Puisqu'on peut réécrire le résultat ci-dessus comme $\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}A^t\right)A = \mathbb{1}$, l'inverse de A est $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}A^t$. Remarquons que si $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$, alors $a = b = c = d = 0$ et la matrice A est la matrice identiquement nulle qui n'a pas d'inverse.

Question 13. *Répondez aux questions suivantes en justifiant* brièvement *votre réponse.*

(a) *Soit le système $Ax = 0$ où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Supposons que* $\det A = 0$. *Combien de solution(s) ce système possède-t-il ?*

On a vu qu'un système de la forme $Ax = 0$ possède toujours comme solution la solution triviale 0. Un tel système n'est donc jamais impossible. Soit il possède une solution unique, à savoir la solution triviale, soit il possède une infinité de solutions. Comme $\det A = 0$, on a que A n'est pas inversible, ce qui signifie qu'on n'a pas une unique solution. Donc ce système possède une infinité de solutions.

(b) *Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont le déterminant vaut r. Que vaut le déterminant de la matrice $B := 3A$?*

On a vu au cours que si on multiplie un ligne ou une colonne de A par un réel λ, alors le déterminant est lui aussi multiplié par λ. Ici, on a $\det A = r$ et on multiplie les n lignes de A par 3. Donc $\det B = r\cdot 3^n$.

(c) *Soient les droites $D_1 \equiv a_1x+b_1y = c_1$ et $D_2 \equiv a_2x+b_2y = c_2$. Quelle(s) condition(s) faut-il imposer à a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 pour que ces deux droites soient parallèles ?*

Pour que chaque équation détermine effectivement une droite, il faut que $(a_1,b_1) \neq (0,0)$ et $(a_2,b_2) \neq (0,0)$.

D_1 et D_2 seront parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs sont multiples, c'est-à-dire si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ (a_1,b_1) = \lambda(a_2,b_2)$. Cette condition peut encore s'écrire

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ a_1 = \lambda a_2 \text{ et } b_1 = \lambda b_2$$

ou encore, en éliminant λ, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (les détails sont laissés au lecteur). Cette dernière égalité affirme la nullité du déterminant de la matrice du système formé des équations des deux droites.

(d) *Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ les droites $D_1 \equiv y - \lambda x = 2$ et $D_2 \equiv y = -2\lambda x - 5$ sont-elles perpendiculaires ?*

Un vecteur normal de D_1 est $(-\lambda, 1)$ et un vecteur normal de D_2 est $(2\lambda, 1)$ car on sait que si $D \equiv ax + by = c$ alors (a,b) est un vecteur normal de D. On a

$$\begin{aligned} D_1 \perp D_2 \quad & \text{ssi} \quad \text{leurs vecteurs normaux sont perpendiculaires} \\ & \text{ssi} \quad \big((-\lambda,1) \,\big|\, (2\lambda,1)\big) = 0 \\ & \text{ssi} \quad -2\lambda^2 + 1 = 0 \\ & \text{ssi} \quad \lambda = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \lambda = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Question 14. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sont des paramètres. Pour quelle(s) valeur(s) de a,b,c,d le graphe de f passe-t-il par les points $(4,-14)$, $(3,-11)$, $(1,7)$ et $(0,10)$? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

En exprimant que chaque point appartient au graphe de f, on a les relations

$$64a + 16b + 4c + d = -14 \tag{7}$$
$$27a + 9b + 3c + d = -11 \tag{8}$$
$$a + b + c + d = 7 \tag{9}$$
$$d = 10 \tag{10}$$

En remplaçant d par 10 dans (7)–(9), on est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} 64a + 16b + 4c = -24 \\ 27a + 9b + 3c = -21 \\ a + b + c = -3 \end{cases}$$

En permutant la première équation avec la troisième, la matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 27 & 9 & 3 & -21 \\ 64 & 16 & 4 & -24 \end{array}\right)$$

Échelonnons cette matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -18 & -24 & 60 \\ 0 & -48 & -60 & 168 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 27L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 64L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -10 \\ 0 & 4 & 5 & -14 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2/(-6) \\ L_3 \leftarrow L_3/(-12) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_2 \end{array}$$

La troisème ligne correspond à l'équation $-\frac{1}{3}c = -\frac{2}{3}$. Donc $c = 2$.
La seconde ligne correspond à l'équation $3b + 4c = -10$. Donc $b = \frac{-10-4c}{3} = -6$.
La première ligne correspond à l'équation $a + b + c = -3$. Donc $a = -3 - b - c = 1$.
Donc $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$.

Question 15.

(a) *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « N est l'inverse de M ».*

N est l'inverse de M si on a $MN = \mathbb{1}$ et $NM = \mathbb{1}$.

(b) *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Donnez alors l'inverse de A. Vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.*

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Montrons que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On a

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\det A = ad - bc$. L'égalité $A^{-1}A = \mathbb{1}$ se démontre de façon analogue.

(c) *Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice S est-elle égale à son inverse ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

On a $\det S = -9 + 2\lambda$. Par le point précédent, on a que $S = S^{-1}$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-9+2\lambda}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -\lambda & 3 \end{pmatrix}$$

Par définition de l'égalité de deux matrices, on déduit que $S = S^{-1}$ si et seulement si

$$3 = \frac{-3}{-9+2\lambda} \tag{11}$$

$$-2 = \frac{2}{-9+2\lambda} \tag{12}$$

$$\lambda = \frac{-\lambda}{-9+2\lambda} \tag{13}$$

$$-3 = \frac{3}{-9+2\lambda} \tag{14}$$

Les relations (11), (12) et (14) disent que $\lambda = 4$. Si on résoud (13), on a $\lambda = 0$ ou $\lambda = 4$. Les quatre relations sont donc satisfaites en même temps si $\lambda = 4$.