Test Introductif (Mathématique Élémentaire)

Test n° 1 (18 septembre 2006) Correction

REMARQUE : Pour chaque question nous présentons *une* solution complète. Ceci ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'autres possibilités d'arriver à la même solution. Pour savoir si la votre est correcte, veuillez consulter vos copies corrigées et demander des explications si vous ne comprenez pas.

Question 1.

- *Décrivez en français la résolution de l'équation du second degré $aX^2 + bX + c = 0$ où a, b, c sont des coefficients réels et $a \neq 0$. Veillez à être précis dans les explications des différentes étapes.*

  La première étape consiste à calculer le discriminant Δ de l'équation, c'est-à-dire à multiplier au carré b et à soustraire à ce carré quatre fois le produit des coefficients a et c ; on a donc $\Delta = b^2 - 4ac$.

  La seconde étape consiste en la résolution de l'équation $X^2 = \Delta$ (i.e., $X^2 - \Delta = 0$). Dans le cas où Δ est un réel positif ou nul, on a deux solutions réelles (identiques si $\Delta = 0$), la racine carrée du discriminant Δ et son opposé, notées $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$ respectivement. Dans le cas où Δ est un réel négatif, l'équation $X^2 = \Delta$ a deux solutions complexes $\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}$ et $-\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}$.

  La troisième étape fournit les solutions de l'équation de départ, celles-ci sont obtenues à partir des solutions y_1 et y_2 de l'équation $X^2 = \Delta$ en soustrayant à une telle solution y_i le coefficient b et ensuite en divisant le résultat ainsi obtenu par $2a$ (c'est possible vu que, par hypothèse, a est non nul) ; on obtient donc deux solutions que nous notons x_1 et x_2 avec

$$x_1 = \frac{-b + y_1}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + y_2}{2a}$$

- *Par un calcul, montrez que les solutions décrites au point précédent sont bien les solutions de l'équation de départ.*

  On a $x_i = \dfrac{-b + y_i}{2a}$. Par conséquent

$$ax_i^2 = a\frac{b^2 - 2by_i + y_i^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 2by_i + y_i^2}{4a}$$

  Donc

$$\begin{aligned} ax_i^2 + bx_i + c &= \frac{b^2 - 2by_i + y_i^2}{4a} + b\frac{-b + y_i}{2a} + c \\ &= \frac{-b^2 + y_i^2}{4a} + c = \frac{-b^2 + \Delta}{4a} + c = \frac{-b^2 + 4ac + \Delta}{4a} = 0 \end{aligned}$$

Question 2. *On ne peut pas diviser par* 0 *parce que*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *le professeur l'a dit — et il a toujours raison !*

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *cela découle de la définition de division : on a en effet que*

diviser par un nombre a revient à multiplier par $1/a$. Or $1/a$ est, par définition, le nombre réel x tel que $x \cdot a = 1$. En appliquant ceci à $a = 0$, on trouve que $1/0$ est le nombre réel x tel que $x \cdot 0 = 1$. Or $x \cdot 0 = 0$ quel que soit x. Par conséquent, il n'y a *aucun* x tel que $x \cdot 0 = 1$ et donc $1/0$ n'existe pas.

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *c'est un cas d'indétermination ; on ne peut donc rien dire !*

Il est vrai que c'est un cas d'indétermination mais ceci fait référence au calcul de la *limite* d'une fraction, non pas au calcul de la fraction elle même.

(d) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *... en fait on peut ! On a* $1/0 = 0$.

(e) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *... en fait on peut ! On a* $1/0 = +\infty$.

Question 3. *Soient les points* $p = (3, -2)$ *et* $q = (1, -4)$.

(a) *Donnez une équation cartésienne de la droite D passant par p et q.*

Vu que D n'est pas verticale (les deuxièmes composantes de p et q ne sont pas égales), elle possède une équation du type $y = ax + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$, où a est le coefficient angulaire de D qui se calcule comme le quotient de la différence des ordonnées par celle des abscisses :

$$a = \frac{-2 - (-4)}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc D possède une équation du type $y = x + b$. Comme $(3, -2) \in D$, on doit avoir $-2 = 3 + b$ d'où $b = -5$. Donc $D \equiv y = x - 5$.

(b) *Calculez la distance entre les points p et q. Expliquez votre démarche.*

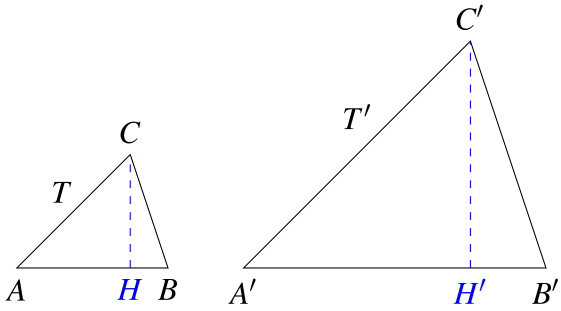
Le théorème de Pythagore implique que la distance de deux points est la racine de la somme des carrés de la différence des abscisses et de celle des ordonnées. Ici :

$$\operatorname{dist}(p, q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-(-4))^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Question 4. *Calculez* $8^{1/3} = 2$. (En effet, $2^3 = 8$.)

Question 5. *Soient deux triangles similaires T et T'. On suppose que T' possède des côtés de longueur double de ceux de T. Quelle est la relation entre l'aire de T' et celle de T. Expliquez en détail pourquoi votre réponse est correcte.*

Deux triangles sont similaires s'il possèdent les mêmes angles. Les deux triangles sont alors homothétiques et les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. Si on note ABC (resp. $A'B'C'$) les sommets de T (resp. T') où les angles en A et A' (resp. B et B', resp. C et C') sont égaux, l'énoncé dit que les longueurs des côtés de T' sont les doubles de celles de T, c'est-à-dire que



$$\left|\vec{A'B'}\right| = 2\left|\vec{AB}\right| \qquad \left|\vec{A'C'}\right| = 2\left|\vec{AC}\right| \qquad \left|\vec{B'C'}\right| = 2\left|\vec{BC}\right|$$

où $\left|\vec{XY}\right|$ désigne la distance entre X et Y. Considérons les triangles AHC et $A'H'C'$ où CH (resp. $C'H'$) est la hauteur de T (resp. T') émanant de C (resp. C'). Ceux-ci sont homothétiques car l'angle en A est le même que celui en A' et les angles en H et H' sont tous deux droits. Comme $\left|\vec{A'C'}\right| = 2\left|\vec{AC}\right|$, le même rapport a lieu entre les autres côtés, en particulier on a $\left|\vec{H'C'}\right| = 2\left|\vec{HC}\right|$. On a alors

$$\operatorname{aire}(T') = \tfrac{1}{2}\text{base}\cdot\text{hauteur} = \tfrac{1}{2}\left|\vec{A'B'}\right|\cdot\left|\vec{H'C'}\right| = \tfrac{1}{2}2\left|\vec{AB}\right|\cdot 2\left|\vec{HC}\right| = 4\tfrac{1}{2}\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{HC}\right| = 4\operatorname{aire}(T)$$

Question 6. *Expliquez pourquoi la formule $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ est valide. Soyez précis dans votre rédaction.*

Par définition du carré, $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$. En appliquant la distributivité à gauche du produit sur la somme, c'est-à-dire le fait que $a(x+y) = ax+ay$, on a $(x+y)(x+y) = (x+y)x+(x+y)y$. En utilisant maintenant la distributivité à droite du produit sur la somme, c'est-à-dire le fait que $(x+y)a = xa+ya$, on a $(x+y)x+(x+y)y = xx+yx+xy+yy$. Finalement, on applique de nouveau la définition du carré (pour dire que $xx = x^2$ et $yy = y^2$) et la commutativité du produit (pour affirmer que $yx+xy = xy+xy = 2xy$), ce qui donne la formule désirée.

Question 7. *Déterminez l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant \dfrac{1}{x}$. Expliquez et justifiez toutes les étapes de vos calculs.*

L'écriture $1/x$ impose la condition d'existence $x \neq 0$. Divisons le reste des $x \in \mathbb{R}$ en deux parties.

- Si $x > 0$ alors, en multipliant les deux membres de l'inéquation par x, on obtient $x^2 \leqslant 1$ c'est-à-dire $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Donc, parmi les $x > 0$, ceux qui satisfont l'inéquation sont ceux de $]0,1]$.
- Si $x < 0$, on peu aussi multiplier les deux membres de l'inéquation par x mais cette fois ci, cela renverse l'inégalité : $x^2 \geqslant 1$. Cette dernière inéquation peut se réécrire $x^2-1 = (x+1)(x-1) \geqslant 0$ et possède donc comme solution les x qui appartiennent à l'ensemble $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Comme on s'intéresse uniquement aux x strictement négatifs, les $x < 0$ qui satisfont l'inéquation sont ceux de l'intervalle $]-\infty,-1]$.

Pour avoir l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'inéquation, il faut prendre tous les $x > 0$ qui la satisfont et tous les $x < 0$ qui la satisfont. Autrement dit

$$x \leqslant 1/x \quad\Leftrightarrow\quad x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad x \in\,]-\infty,-1] \cup]0,1]$$

Question 8. *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On sait que, pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, on a*

- *si $x < 0$, alors $x \in A$ si et seulement si $-10 \leqslant x \leqslant 1$;*
- *si $x \geqslant 0$, alors $x \in A$ si et seulement si $x^2 \leqslant x$.*

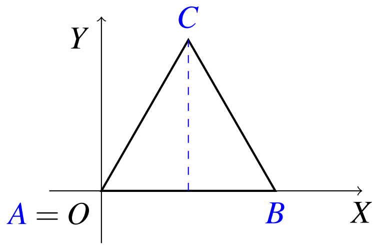
Écrivez l'ensemble A comme une union d'intervalles (moins il y a d'intervalles, mieux c'est).

Le principe est le même que celui expliqué dans la question précédente pour regrouper les cas. L'énoncé nous dit que

- $]-\infty,0[\cap A =]-10,0[$ (on ne tient pas compte de la partie positive puisqu'on ne discute que des x strictement négatifs) ;
- $[0,+\infty[\cap A = [0,1]$ (en effet, soit $x = 0$, soit $x^2 \leqslant x$ est équivalent, pour des $x > 0$, à $x \leqslant 1$).

Donc $A = \big(]-\infty,0[\cap A\big) \cup \big([0,+\infty[\cap A\big) =]-10,0[\cup [0,1] =]-10,1]$.

Question 9. *On considère, dans un repère orthonormé OXY, un triangle équilatéral T de côté de longueur 1 comme représenté sur la figure ci-contre. Donnez les coordonnées des trois sommets de T en expliquant comment vous les obtenez (des réponses sans justifications ne valent rien).*



Comme on le voit sur la figure le sommet A est sur l'origine O ; ses coordonnées sont donc $A = (0,0)$. Le sommet B est sur l'axe OX et donc sa seconde coordonnée est nulle. Comme sa distance à l'origine est la longueur du côté du triangle qui est 1, on a $B = (1,0)$. Comme le triangle est équilatéral, il est en particulier isocèle, donc la hauteur partant de C coupe le segment AB en deux parties égales. Par conséquent $C = (\frac{1}{2},c)$ pour un certain $c > 0$ à déterminer. Comme $1 = \operatorname{dist}(A,C)^2 = (\frac{1}{2})^2 + c^2 = \frac{1}{4} + c^2$, on déduit que $c = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $C = \big(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$.

Question 10. *Donnez la longueur du côté d'un cube de volume 64. Expliquez votre démarche.*

Si le côté du cube est c alors son volume est c^3. Ici on sait dont que $c^3 = 64$. Par conséquent $c = 64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$ (car $4^3 = 64$).

Question 11. *Soit une droite D d'équation $ax+by = c$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$.*

(a) *Donnez des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres a, b et c pour que D passe par l'origine du repère.*

D passe par l'origine du repère signifie que $(0,0) \in D$, c'est-à-dire que $(0,0)$ vérifie l'équation de D. Autrement dit, $(0,0) \in D$ si et seulement si $a0+b0 = c$, i.e. ssi $c = 0$.

(b) *Donnez des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres a, b et c pour que D soit verticale.*

Prenons comme définition que D est verticale si et seulement si, dès que $(x_0, y_0) \in D$, alors $(x_0, y) \in D$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Nous allons montrer que D est verticale si et seulement si $b = 0$. Si $b = 0$, alors l'équation de D devient* $x = c/a$ qui est bien verticale (les points de la droites sont du type $(c/a, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$ et donc notre définition de « vertical » est satisfaite — voyez-vous pourquoi ?). Inversement, supposons que D est verticale et soit $(x_0, y_0) \in D$, c'est-à-dire $ax_0 + by_0 = c$. Comme D est verticale, on a d'après notre définition que $(x_0, y) \in D$ pour tout y, i.e.

$$\text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \quad ax_0 + by = c$$

En particulier, en prenant $y = -y_0$, on a $ax_0 - by_0 = c$. En sommant avec l'équation $ax_0 + by_0 = c$, on trouve que $ax_0 = c$. En prenant maintenant $y = 1$, on en déduit que $b = c - ax_0 = 0$.

*Si $b = 0$, on ne peut avoir $a = 0$ car sinon $ax + b = c$ n'est plus l'équation d'une droite.