

Mathématique Élémentaire

Test n° 2

(25 septembre 2006)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

(a) ■ $3 + i + (-2i) =$

■ $(3 + i) \cdot (-2i) =$

■ $\overline{7 - 10i} =$

(b) ■ $|3 + i| =$

■ $\left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right| =$

(c) $(1 - 2i)^{-1} =$

/6

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Placez dans le plan les nombres complexes suivants :

/ 3

(a) $z_1 := 3 + i$, $z_2 := -2i$, $z_3 := \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

(b) le conjugué de $3 + i$.

(c) tous les complexes de module 1.

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (25 septembre 2006)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

(a) $X^2 + 7 = 0$

/ 4

(b) $X^2 + X + 2 = 0$

Question 4. Soient $u = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$.

(a) Définissez la norme de u , notée $\|u\|$, et le produit scalaire de u et v , noté $(u|v)$.

(b) Lorsqu'on écrit $\|u\| = 0$ et $u = 0$, les deux zéros ont-ils le même sens ? Expliquez.

(c) Supposons que $u \neq 0$. Montrez que la norme du vecteur $v = \frac{u}{\|u\|}$ vaut 1. Énoncez clairement les propriétés que vous utilisez et détaillez vos calculs.

(d) Montrez que $\|u + v\| = \|u - v\|$ si et seulement si u et v sont orthogonaux.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5.

/ 4

(a) Le nombre complexe $1 + i$ est-il solution de l'équation $X^2 - 3iX + 1 = 0$?

(b) Même question pour l'équation $X^3 + X^2 + X + 1 - 5i = 0$.

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Prouvez par récurrence que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

/5

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7.

/6

- (a) Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 passant par le point $(-1, -1)$ et dont un vecteur directeur est $(3, -2)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.
- (b) Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 passant par le point $(0, 3)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv -2x = -y + 8$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.
- (c) Donnez une équation paramétrique de la droite D_3 parallèle à l'axe des x et passant par le point $(\pi, \sqrt{2})$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (25 septembre 2006)

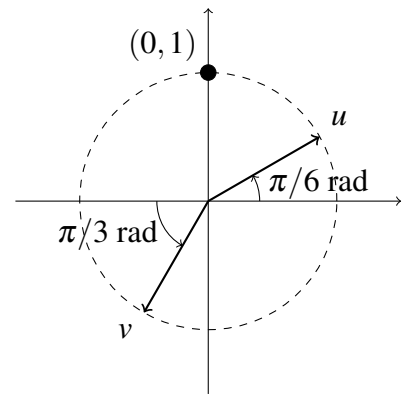
Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Calculez i^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliquez clairement le phénomène constaté. Placez les complexes obtenus dans le plan.

/ 4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Donnez les composantes des vecteurs u et v définis sur la figure ci-contre. Expliquez votre démarche.



/ 2