Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (25 septembre 2006) **Correction**

Question 1. *Calculez*

(a)
- $3+\boldsymbol{i}+(-2\boldsymbol{i}) = 3-\boldsymbol{i}$
- $(3+\boldsymbol{i})\cdot(-2\boldsymbol{i}) = 2-6\boldsymbol{i}$
- $\overline{7-10\boldsymbol{i}} = 7+10\boldsymbol{i}$

(b)
- $|3+\boldsymbol{i}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$
- $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$

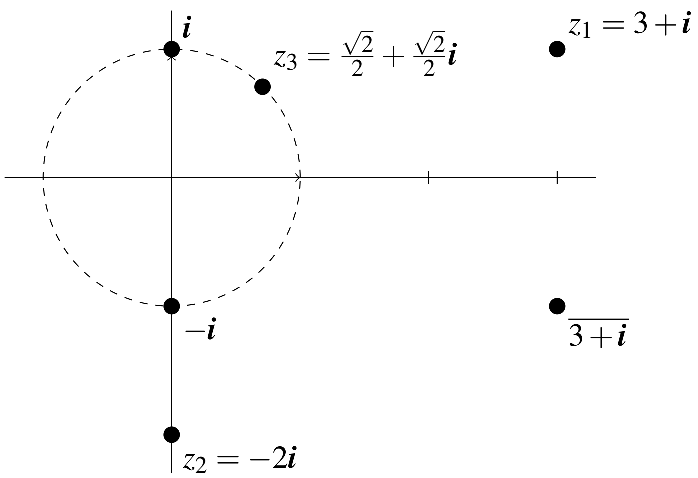
(c) $(1-2\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{1}{5}+\frac{2}{5}\boldsymbol{i}$ (on applique la formule $(a+b\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\boldsymbol{i}$)

Question 2. *Placez dans le plan les nombres complexes suivants :*

(a) $z_1 := 3+\boldsymbol{i}$, $z_2 := -2\boldsymbol{i}$, $z_3 := \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$.

(b) *le conjugué de* $3+\boldsymbol{i}$.

(c) *tous les complexes de module* 1.



Le cercle en pointillés est le cercle de rayon 1 centré en 0. C'est exactement $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Question 3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :*

(a) $X^2+7=0$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de $X^2+7=0$ sont celles de $X^2=-7$ et sont données par

$$x_1=\sqrt{7}\cdot\boldsymbol{i} \quad \text{et} \quad x_2=-\sqrt{7}\cdot\boldsymbol{i}.$$

(b) $X^2+X+2=0$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de $X^2+X+2=0$ sont données par

$$x_1=\frac{-1+y_1}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1+y_2}{2}$$

où y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation $X^2=\Delta$. Ici $\Delta=1-4\cdot1\cdot2=-7$. Donc y_1 et y_2 sont les complexes solution de (a). On a donc $x_1=\frac{-1+\sqrt{7}\cdot\boldsymbol{i}}{2}$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{7}\cdot\boldsymbol{i}}{2}$.

Question 4. *Soient $u=(u_1,u_2,\dots,u_N)\in\mathbb{R}^N$ et $v=(v_1,v_2,\dots,v_N)\in\mathbb{R}^N$.*

(a) *Définissez la norme de u, notée $\|u\|$, et le produit scalaire de u et v, noté $(u|v)$.*

On a : $\|u\|=\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2+\cdots+{u_N}^2}$ et $(u|v)=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_Nv_N$.

(b) *Lorsqu'on écrit $\|u\|=0$ et $u=0$, les deux zéros ont-ils le même sens ? Expliquez.*

Chaque égalité a un sens ssi les objets apparaissant dans les deux membres sont de même type. On a vu que $\|u\|$ est un réel positif. Dans l'égalité $\|u\|=0$, 0 représente donc un nombre réel. Enfin, puisque u est un vercteur, 0 représente le vecteur nul dans la seconde égalité càd $0=(\underbrace{0,0,\dots,0}_{N\text{ fois}})$.

(c) *Supposons que $u\neq0$. Montrez que la norme du vecteur $v=\dfrac{u}{\|u\|}$ vaut 1. Énoncez clairement les propriétés que vous utilisez et détaillez vos calculs.*

On a $v=\frac{1}{\|u\|}\cdot u$. Or, on a vu la propriété : $\forall x\in\mathbb{R},\forall\lambda\in\mathbb{R},\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$. En utilisant cette propriété avec $\lambda=\frac{1}{\|u\|}$, on obtient

$$\|v\|=\left|\frac{1}{\|u\|}\right|\cdot\|u\|=\frac{1}{\|u\|}\cdot\|u\|$$

car $\|u\|>0$ puisque $u\neq0$. Donc $\|v\|=1$.

(d) *Montrez que* $\|u+v\| = \|u-v\|$ si et seulement si *u et v sont orthogonaux.*

Puisque chaque membre est positif,
on a $\|u+v\| = \|u-v\|$
ssi $\|u+v\|^2 = \|u-v\|^2$ (propriété : $\forall a,b \in \mathbb{R}^+, a=b$ ssi $a^2=b^2$)
ssi $(u+v|u+v) = (u-v|u-v)$ (propriété : $\forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\|^2 = (x|x)$)
ssi $(u|u)+2(u|v)+(v|v) = (u|u)-(u|v)+(v|v)$
(Ce développement a été vu au cours. Les propriétés utilisées sont :

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} (x|y+z) &= (x|y)+(x|z) \\ (x+y|z) &= (x|z)+(y|z) \\ (\lambda x|\lambda y) &= \lambda^2(x|y) \end{aligned}$$

et la commutativité du produit scalaire.)

ssi $4(u|v) = 0$ après simplification
ssi u et v sont orthogonaux (on a vu que deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul).

Question 5.

(a) *Le nombre complexe* $1+\boldsymbol{i}$ *est-il solution de l'équation* $X^2-3\boldsymbol{i}X+1=0$ *?*

(b) *Même question pour l'équation* $X^3+X^2+X+1-5\boldsymbol{i}=0$.

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

(a) Le complexe $1+\boldsymbol{i}$ est solution de $X^2-3\boldsymbol{i}X+1=0$ ssi $(1+\boldsymbol{i})^2-3\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})+1=0$ (définition de « α est solution de l'équation $p(X)=0$ »). Calculons le premier membre ; on a $(1+\boldsymbol{i})^2 = 2\boldsymbol{i}$, donc le premier membre devient

$$2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}+3+1 = -\boldsymbol{i}-4 \neq 0.$$

Donc $1+\boldsymbol{i}$ n'est pas solution de l'équation donnée en (a).

(b) De la même façon, $1+\boldsymbol{i}$ sera solution de l'équation présentée en (b) ssi

$$(1+\boldsymbol{i})^3+(1+\boldsymbol{i})^2+(1+\boldsymbol{i})+1-5\boldsymbol{i}=0.$$

Le premier membre est égal à

$$(1+\boldsymbol{i})2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}+1+\boldsymbol{i}+1-5\boldsymbol{i} = 2\boldsymbol{i}-2+2\boldsymbol{i}+1+\boldsymbol{i}+1-5\boldsymbol{i} = 0+0\boldsymbol{i} = 0.$$

Donc $1+\boldsymbol{i}$ est solution de l'équation donnée en (b).

Question 6. *Prouvez par récurrence que*

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<u>Cas initial : $n = 1$</u>
Le premier membre de l'égalité est $0^2 + 1^2 = 1$.
Le second membre de l'égalité est $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$.
Le cas initial est donc vérifié.

<u>Étape de récurrence :</u>
Supposons (hypothèse de récurrence) que la formule soit vérifiée pour tout naturel $n \leqslant k$ ($k \geqslant 1$) et montrons que, sous cette hypothèse, la formule est vérifiée en $n = k+1$. Dans ce cas, le premier membre devient :

$$\begin{aligned}
0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hyp. de réc. pour } n=k}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right] \\
&= \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6) \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

car

$$(k+2)\big(2(k+1)+1\big) = 2k^2 + 6k + 4 + k + 2 = 2k^2 + 7k + 6.$$

Question 7.

(a) *Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 passant par le point $(-1,-1)$ et dont un vecteur directeur est $(3,-2)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(b) *Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 passant par le point $(0,3)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv -2x = -y + 8$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(c) *Donnez une équation paramétrique de la droite D_3 parallèle à l'axe des x et passant par le point $(\pi, \sqrt{2})$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(a) On a vu la forme générale d'une équation cartésienne d'une droite : $ax + by = c$ où $(a,b) \neq (0,0)$ est un vecteur normal. Ici $(2,3)$ est un vecteur normal de D_1 car ce vecteur est orthogonal au vecteur directeur donné. En effet $\big((2,3) \mid (3,-2)\big) = 0$. Donc une équation cartésienne de D_1 est de la forme $2x + 3y = c$. on trouve c en remplaçant x et y par -1. On a : $-2 - 3 = c$, c'est-à-dire $c = -5$. Donc $D_1 \equiv 2x + 3y = -5$.

(b) On a $D \equiv -2x = -y+8$. Donc $(-2,1)$ est une vecteur normal de D. Puisque D et D_2 sont perpendiculaires, ce vecteur est un vecteur directeur de D_2. Connaissant un vecteur directeur et un point de D_2, on a $D_2 \equiv (x,y) = (0,3) + \lambda(-2,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

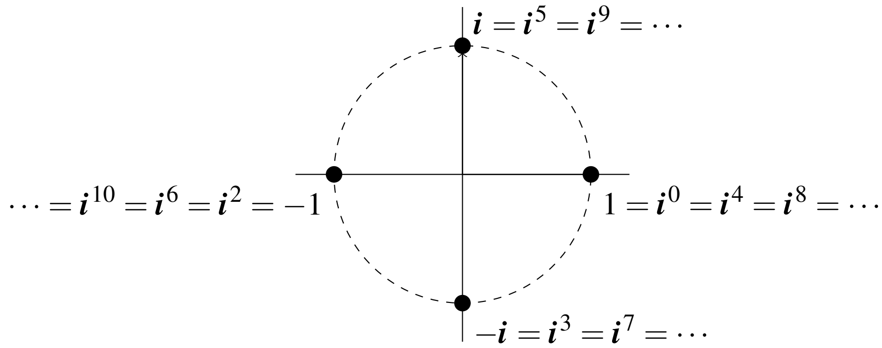
(c) Puisque D_3 est parallèle à l'axe des x, un vecteur directeur de D_3 est $(1,0)$. Connaissant aussi un point de D_3, on a $D_3 \equiv (x,y) = (\pi, \sqrt{2}) + \lambda(1,0),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Question 8. *Calculez $\boldsymbol{i}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliquez clairement le phénomène constaté. Placez les complexes obtenus dans le plan.*

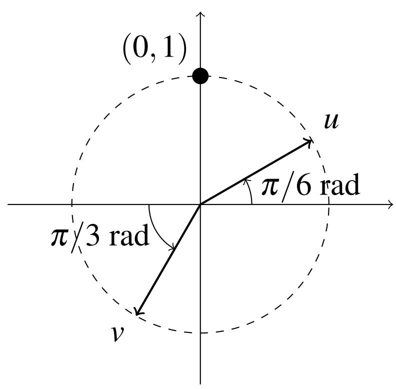
Par définition de l'exponentiation, $\boldsymbol{i}^0 = 1$ et $\boldsymbol{i}^1 = \boldsymbol{i}$. Par définition de $\boldsymbol{i}^2$, on a $\boldsymbol{i}^2 = -1$ et donc $\boldsymbol{i}^3 = \boldsymbol{i}^2 \cdot \boldsymbol{i} = -1 \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$. De même $\boldsymbol{i}^4 = \boldsymbol{i}^3 \cdot \boldsymbol{i} = (-\boldsymbol{i}) \cdot \boldsymbol{i} = -(-1) = 1$. Puisque $\boldsymbol{i}^4 = 1$, il s'ensuit que $\boldsymbol{i}^{4\ell} = (\boldsymbol{i}^4)^\ell = 1^\ell = 1$ quelque soit $\ell \in \mathbb{N}$. De façon similaire,

- si l'exposant n est de la forme $4\ell+1$, on obtient $\boldsymbol{i}^{4\ell+1} = \boldsymbol{i}^{4\ell} \cdot \boldsymbol{i} = 1 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$;
- si l'exposant n est de la forme $4\ell+2$, on obtient $\boldsymbol{i}^{4\ell+2} = \boldsymbol{i}^{4\ell} \cdot \boldsymbol{i}^2 = 1 \cdot \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{i}^2 = -1$;
- si l'exposant n est de la forme $4\ell+3$, on obtient $\boldsymbol{i}^{4\ell+3} = \boldsymbol{i}^{4\ell} \cdot \boldsymbol{i}^3 = 1 \cdot \boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$.

Ceci termine le calcul puisque tout nombre naturel n s'écrit $n = 4\ell + r$ où $r \in \{0,1,2,3\}$ (algorithme d'Euclide pour la division par 4).



Question 9. *Donnez les composantes des vecteurs u et v définis sur la figure ci-contre. Expliquez votre démarche.*



Notons (a_u, b_u) et (a_v, b_v) les composantes des vecteurs u et v respectivement. Les vecteurs u et v sont clairement situés sur le cercle centré en 0 et qui passe par $(0,1)$. Par conséquent, la longueur d'un rayon du cercle est donné par la distance entre $(0,0)$ et $(1,0)$, c'est-à-dire 1.

Le vecteur u (resp. v) est donc de norme 1 (longueur du rayon du cercle). Or on sait que les coordonnées d'un tel point sont données par $(\cos\theta, \sin\theta)$ où θ est l'angle entre la demi-doite horizontale $y = 0$, $x \geqslant 0$ et la demi-droite issue de $(0,0)$ et supportée par u (resp. v). Puisque l'angle est $\pi/6$ (resp. $\pi + \pi/3$), $(a_u, b_u) = \big(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)\big) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ (resp. $(a_v, b_v) = \big(\cos(4\pi/3), \sin(4\pi/3)\big) = \big(-\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\big) = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$).