

Mathématique Élémentaire

Test n° 3

(2 octobre 2006)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

■ $\left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| =$

■ $\left| \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right| =$

■ $\text{Arg} \left(\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^7 \right) =$

■ $\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1} =$

Question 2. Prouvez que $\bar{z} = z^{-1}$ si et seulement si $|z| = 1$.

/ 4

/ 3

Question 3. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre choix par un bref argument ou un contre-exemple.

(a) Vrai : Faux : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(b) Vrai : Faux : pour tout $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

(c) Vrai : Faux : pour tout $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ et $y \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x} \leq y \Rightarrow x \leq y^2$

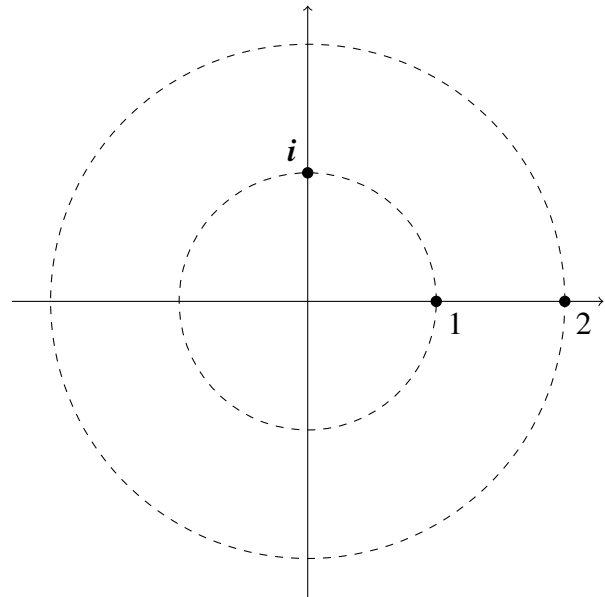
(d) Vrai : Faux : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3$

(e) Vrai : Faux : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 \leq y^2 \Rightarrow x \leq |y|$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Calculez les puissances entières de $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c'est-à-dire z^n pour $n \geq 0$ et z^n pour $n < 0$). Exprimez les résultats en terme de modulo. Représentez les résultats dans le plan complexe.

/6



Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

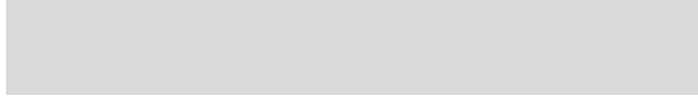
/5

Question 5. Résolvez l'inéquation suivante (de manière algébrique) :

$$x|x| \leq 2x \tag{1}$$

Exprimez vos solutions en complétant l'équivalence suivante :

x est solution de (1) \Leftrightarrow



Veillez à détailler et à justifier les différentes étapes de vos calculs ci-dessous.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

/5

Question 6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient α et β deux solutions de l'équation $X^n = 1$.

- (a) Prouvez que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, α^k est solution de l'équation.
- (b) Prouvez que α^{-1} existe et est solution de l'équation.
- (c) Prouvez que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, α^k est solution de l'équation.
- (d) Prouvez que $\alpha \cdot \beta$ est aussi solution de l'équation.

Question 7. Soient les vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^N$ définis par

$$x = (1, 1, \dots, 1) \quad \text{et} \quad y = (1^3, 2^3, \dots, N^3)$$

Montrez par récurrence que, pour tout $N \geq 2$, on a

$$(x|y) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

/5

Question 8. Donnez l'ensemble des solutions de $Z^6 - 1 = 0$.

/2

Question 9. Donnez la forme trigonométrique de

■ $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} =$

■ $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} =$

■ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i =$

■ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4 =$

/3

Question 10. Écrivez l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - 2x} \geq \frac{1}{x - 3} \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

/7

Mathématique Élémentaire

Test n° 3

(2 octobre 2006)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.