Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 3 (2 octobre 2006) **Correction**

Question 1. *Calculez*

- $\left|\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$
- $\left|\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right| = \left|\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^3 = 1^3 = 1$ (vu le point précédent)
- $\operatorname{Arg}\left(\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7\right) = 7\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \bmod 2\pi = 7\frac{\pi}{3} \bmod 2\pi = \frac{\pi}{3}$
- $\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = \frac{\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{1^2} = \frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ car $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Question 2. *Prouvez que $\bar{z} = z^{-1}$ si et seulement si $|z| = 1$.*

$\bar{z} = z^{-1}$ si et seulement si (définition de l'inverse dans le cas commutatif) $\bar{z}\cdot z = 1$. Dans ce cas, on a $|\bar{z}\cdot z| = |1| = 1$, ou encore $|\bar{z}|\cdot|z| = 1$. Puisque $|\bar{z}| = |z|$, on a $|z|^2 = 1$, ou encore $|z| = 1$ vu que $|z| \in \mathbb{R}^+$.

Si $|z| = 1$, puisque $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, on a $\bar{z} = z^{-1}$.

Question 3. *Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre choix par un bref argument ou un contre-exemple.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$*

On a vu que $x \leqslant y$ si et seulement si $y-x \geqslant 0$. Par conséquent, quel que soit $z \in \mathbb{R}$, on a aussi $(y+z)-(x+z) = y-x \geqslant 0$ ce qui montre que $x+z \leqslant y+z$.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *pour tout $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \leqslant y \Rightarrow \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$*

Un contre-exemple est donné par $x = -1 \leqslant y = 1$ car on n'a pas $\frac{1}{x} = -1 \geqslant \frac{1}{y} = 1$.

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *pour tout $x \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ et $y \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x} \leqslant y \Rightarrow x \leqslant y^2$*

Comme par hypothèse on a $\sqrt{x} \leqslant y$ et qu'il est toujours vrai que $\sqrt{x} \geqslant 0$, y est forcément $\geqslant 0$. L'élévation au carré de chaque membre préserve donc l'inégalité (car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$).

(d) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y \Rightarrow x^3 \leqslant y^3$

La fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE : On peut bien entendu prouver ceci à partir des principes de base. Pour commencer, remarquons que l'élévation au cube d'un réel ξ préserve le signe de ξ. En effet, si $\xi \geqslant 0$, on a $\xi^2 = \xi\xi \geqslant 0$ et donc $\xi^3 = \xi^2\xi \geqslant 0$ (car la multiplication de deux nombres positifs est un nombre positif) ; si $x < 0$, on a $\xi^2 > 0$ (multiplication de deux négatifs), d'où $\xi^3 < 0$ (multiplication de $\xi^2 > 0$ par $\xi < 0$).

Pour la question initiale, nous allons distinguer trois cas :

- si $x \leqslant 0 \leqslant y$, alors, par ce qu'on vient de montrer, $x^3 \leqslant 0 \leqslant y^3$ et la thèse est prouvée.
- si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors, en multipliant par $x \geqslant 0$ (resp. par $y \geqslant 0$), on obtient $x^2 \leqslant xy$ (resp. $xy \leqslant y^2$). Par transitivité, on a donc $x^2 \leqslant y^2$. En multipliant les membres de cette dernière inégalité par $x \geqslant 0$, on trouve que $x^3 \leqslant xy^2$. Par ailleurs, en multipliant $xy \leqslant y^2$ par y, on a que $xy^2 \leqslant y^3$. De nouveau, la transitivité implique que $x^3 \leqslant y^3$.
- si $x \leqslant y \leqslant 0$, on refait le même argument qu'au point précédent, cette fois en inversant les inégalités à chaque multiplication par un nombre négatif (détails laissés au lecteur).

(e) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 \leqslant y^2 \Rightarrow x \leqslant |y|$

Puisque $0 \leqslant x^2 \leqslant y^2$, on peut prendre la racine carrée des deux membres. La racine carrée étant une fonction croissante, l'inégalité est préservée : $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{y^2} = |y|$. Par ailleurs, on a toujours que $x \leqslant |x|$ (si $x \geqslant 0$, on a l'égalité ; si $x < 0$, on a $x < 0 \leqslant |x|$). Par transitivité, on en déduit que $x \leqslant |y|$ comme recherché.

Question 4. *Calculez les puissances entières de* $\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ *(c'est-à-dire* z^n *pour* $n \geqslant 0$ *et* z^n *pour* $n < 0$*). Exprimez les résultats en terme de modulo. Représentez les résultats dans le plan complexe.*

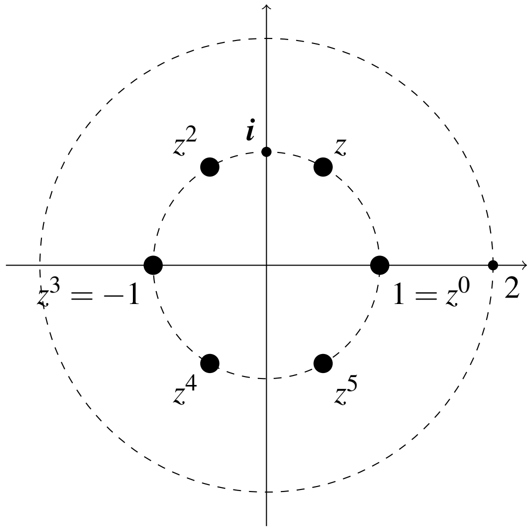
$\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$ (voir les questions précédentes).
<u>Cas $n \geqslant 0$</u> : Donc $(\operatorname{cis}\frac{\pi}{3})^n$ est égal à $\operatorname{cis}\frac{n\pi}{3}$, c'est-à-dire

- Si $n = q \cdot 6$ c'est-à-dire $n \bmod 6 = 0$:

$$\operatorname{cis}(q2\pi) = 1$$

- Si $n = q \cdot 6 + 1$ c'est-à-dire $n \bmod 6 = 1$:

$$\operatorname{cis}\left(q2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$$



- Si $n = q \cdot 6 + 2$ c'est-à-dire $n \bmod 6 = 2$:

$$\operatorname{cis}\left(q2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$$

- Si $n = q \cdot 6 + 3$ c'est-à-dire $n \bmod 6 = 3$:

$$\operatorname{cis}\left(q2\pi + \frac{3\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\pi = -1$$

- Si $n = q \cdot 6 + 4$ c'est-à-dire $n \bmod 6 = 4$:

$$\operatorname{cis}\left(q2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$$

- Si $n = q \cdot 6 + 5$ c'est-à-dire $n \bmod 6 = 5$:

$$\operatorname{cis}\left(q2\pi + \frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$$

<u>Cas $n = -1$</u> : $(\operatorname{cis}\frac{\pi}{3})^{-1} = \overline{\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}$ (question 2) car $\left|\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right| = 1$. Donc $(\operatorname{cis}\frac{\pi}{3})^{-1} = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$.
<u>Cas $n < 0$</u> : $(\operatorname{cis}\frac{\pi}{3})^{n} = (\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3})^{|n|} = \operatorname{cis}|n|\frac{5\pi}{3} = \cdots$ (détails laissés au lecteur)

Question 5. *Résolvez l'inéquation suivante (de manière algébrique) :*

$$x\,|x| \leqslant 2x \tag{1}$$

Exprimez vos solutions en complétant l'équivalence suivante :

$$x \text{ est solution de } (1) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x \leqslant -2 \text{ ou } (0 \leqslant x \text{ et } x \leqslant 2)}$$

Veillez à détailler et à justifier les différentes étapes de vos calculs ci-dessous.

Distinguons trois cas :

- si $x = 0$, l'inéquation devient $0 \leqslant 0$ et elle est donc satisfaite.
- si $x > 0$, on peut multiplier les deux membres par $1/x$ sans changer le sens de l'inégalité. (1) est donc équivalente à $|x| \leqslant 2$. Par l'équivalence vue au cours, on sait que ceci a pour solution $x \in [-2, 2]$. Comme on ne s'intéresse qu'aux $x > 0$, ceux qui satisfont (1) sont $x \in]0, 2]$.
- si $x < 0$, la multiplication de (1) par $1/x$ change le signe de l'inégalité : (1) est équivalente à $|x| \geqslant 2$ qui a pour solutions les $x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Comme on ne s'intéresse qu'aux $x < 0$, l'ensemble des solutions pour ce cas est $]-\infty, -2]$.

Pour avoir l'ensemble des solutions de (1), on fait l'union des trois ensembles précédents : $\{0\} \cup]0, 2] \cup]-\infty, -2] =]-\infty, -2] \cup [0, 2]$.

Question 6. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient α et β deux solutions de l'équation $X^n = 1$.*

(a) *Prouvez que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, α^k est solution de l'équation.*

(b) *Prouvez que α^{-1} existe et est solution de l'équation.*

(c) *Prouvez que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, α^k est solution de l'équation.*

(d) *Prouvez que $\alpha \cdot \beta$ est aussi solution de l'équation.*

α est solution de $X^n = 1$ signifie que
$$\alpha^n = 1. \tag{2}$$

(a) $(\alpha^k)^n = (\alpha^n)^k = 1^k = 1$ vu (2). Donc $(\alpha^k)^n = 1$, ce qui prouve que α^k est solution de l'équation $X^n = 1$.

(b) Puisque $\alpha^n = 1$ ou $|\alpha^n| = |1| = 1$, ou encore (par la propriété $|z^n| = |z|^n$) $|\alpha|^n = 1$ c'est-à-dire $|\alpha| = 1$ puisque $|\alpha| \in \mathbb{R}^+$. Donc par la question $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$, $(\alpha^{-1})^n = (\alpha^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$ vu (2). Donc α^{-1} est solution de l'équation $X^n = 1$.

(c) Il reste, au vu de (a), à prouver le cas où $k < 0$. On a que $\alpha^k = (\alpha^{-1})^{|k|}$ et puisque α^{-1} est solution par (b), on est dans les hypothèses pour appliquer (a) à α^{-1} vu que $|k| \geqslant 0$.

(d) $(\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n$ car $\cdot$ commutative. Donc $(\alpha\beta)^n = 1 \cdot 1 = 1$, ce qui prouve l'assertion.

Question 7. *Soient les vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^N$ définis par*
$$x = (1, 1, \dots, 1) \qquad \textit{et} \qquad y = (1^3, 2^3, \dots, N^3)$$
Montrez par récurrence que, pour tout $N \geqslant 2$, on a
$$(x|y) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

Cas initial : $N = 2$. Dans ce cas, on a $x = (1,1)$ et $y = (1^3, 2^3)$. Le premier membre vaut donc $\big((1,1) \mid (1^3,2^3)\big) = 1^3 + 2^3 = 9$ et le deuxième membre vaut $\frac{2^2 \cdot (2+1)^2}{4} = 4 \cdot \frac{3^2}{4} = 9$. Les deux membres sont bien égaux.

Supposons que pour tout $N \leqslant K$ (avec $K \geqslant 2$), on a $(x|y) = \frac{1}{4}N^2(N+1)^2$ (hypothèse de récurrence).
Montrons que l'égalité est vérifiée pour $N = K+1$, c'est-à-dire $(x|y) = \frac{1}{4}(K+1)^2(K+2)^2$.
Lorsque $N = K+1$, on a $x = \underbrace{(1,1,1,\dots,1)}_{(K+1)\text{ fois}}$ et $y = \big(1^3, 2^3, \dots, K^3, (K+1)^3\big)$. Alors,

$$\begin{aligned}
(x|y) &= 1^3 + 2^3 + \cdots + K^3 + (K+1)^3 && \text{par définition du produit scalaire}\\
&= \frac{K^2(K+1)^2}{4} + (K+1)^3 && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{(K+1)^2}{4} \cdot \big(K^2 + 4(K+1)\big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(K+1)^2}{4} \cdot (K^2+4K+4)$$
$$= \frac{(K+1)^2 \cdot (K+2)^2}{4}$$

On a donc bien prouvé l'égalité pour tout $N \geqslant 2$.

Question 8. *Donnez l'ensemble des solutions de $Z^6 - 1 = 0$.*

Cette équation peut s'écrire $Z^6 = 1$. On a vu que les solutions de cette équation sont $\operatorname{cis}\frac{2k\pi}{6}$, avec $k = 0,1,2,3,4,5$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\{\operatorname{cis} 0 = 1,\ \operatorname{cis}\frac{\pi}{3},\ \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3},\ \operatorname{cis}\pi = -1,\ \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3},\ \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}\}$

Question 9. *Donnez la forme trigonométrique de*

- $\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$ (voir question 1 où on a calculé le module et l'argument de ce complexe)
- $-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{i} = \overline{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}} = \overline{\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}} = \operatorname{cis}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\frac{11\pi}{6}$
- $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^4 = \left(\overline{\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \overline{\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^4} = \overline{\operatorname{cis}\pi} = \overline{-1} = -1$

Question 10. *Écrivez l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ défini par*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - 2x} \geqslant \frac{1}{x-3} \right\}$$

sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Commençons par examiner le signe des deux dénominateurs. Pour $x - 3$, c'est facile :

x		3	
$x-3$	$-$	0	$+$

Pour $\sqrt{x^2+1} - 2x$, on va résoudre $\sqrt{x^2+1} - 2x \geqslant 0$, l'ensemble sur lequel l'expression est < 0 étant le complémentaire de l'ensemble des solutions. On va aussi veiller à discuter le cas $= 0$ tout au long des calculs. Pour pouvoir élever au carré les deux membres de $\sqrt{x^2+1} \geqslant 2x$ en conservant l'inégalité, on doit distinguer deux cas :

- si $2x < 0$, alors l'inégalité est toujours vérifiée (et on a pas l'égalité car $2x < 0 \leqslant \sqrt{x^2+1}$).

- si $x \geqslant 0$, on peut élever au carré les deux membres en gardant une inéquation équivalente, ce qui donne $x^2+1 \geqslant 4x^2$ ou encore $x^2 \leqslant \frac{1}{3}$. Comme les deux membres sont $\geqslant 0$, on peut prendre la racine carrée (qui est croissante, donc concerve l'inégalité) et on obtient $|x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$. Cette équation a pour solutions $x \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$. Comme on ne s'intéresse qu'aux $x \geqslant 0$, l'ensemble des solutions pour ce cas est $[0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$. Remarquons que si on part de l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x$, l'égalité se propage dans les calculs précédents, ce qui implique que la seule solution de cette équation est $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$\sqrt{x^2+1}-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$

Dressons un tableau résumant ce qu'on a trouvé jusqu'à présent :

x		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		3	
$\sqrt{x^2+1}-2x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Venons-en à l'inéquation de départ :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-2x} \geqslant \frac{1}{x-3} \tag{3}$$

(a) Pour $x = \sqrt{3}/3$ ou $x = 3$, un des dénominateurs s'annule ; on doit donc les exclure.

(b) Lorsque $x \in \left]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, le membre de gauche est > 0 tandis que celui de droite est < 0 ; l'inégalité (3) est donc vérifiée. Pour $x \in]3, +\infty[$, le membre de gauche est < 0 et celui de droite est > 0 ; (3) n'est donc *pas* vérifiée.

(c) Finalement, pour $x \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right[$, on multiplie par les deux dénominateurs < 0, ce qui inverse deux fois l'inégalité (donc en conserve la position initiale), ce qui donne

$$x-3 \geqslant \sqrt{x^2+1}-2x \tag{4}$$

ou encore $3x-3 \geqslant \sqrt{x^2+1}$. Distinguons deux cas :

- Si $3x-3 < 0$, l'inégalité (4) n'est jamais vérifiée.
- Si $x \geqslant 1$, les deux membres sont $\geqslant 0$, on peut donc les élever au carré en conservant l'inégalité, ce qui donne après simplification :

$$4x^2 - 9x + 4 \geqslant 0$$

En appliquant les règles vues pour déterminer le signe d'un polynôme du second degré, on trouve :

x		$\frac{9-\sqrt{17}}{8}$		$\frac{9+\sqrt{17}}{8}$	
$4x^2-9x+4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Comme, en évaluant le polynôme en $x = 1$, on trouve une valeur < 0, le nombre 1 se situe entre les deux racines. Les solutions pour ce cas ci sont donc $x \in \left[\frac{9+\sqrt{17}}{8}, +\infty\right[$.

En rassemblant les deux cas, on trouve que

$$(4) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{9+\sqrt{17}}{8}, +\infty\right[$$

Cependant (4) n'est équivalent à (3) que sur $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right[$, donc les solutions de (3) dans cet intervalle sont dans l'ensemble

$$\left]\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right[\cap \left[\frac{9+\sqrt{17}}{8}, +\infty\right[= \left[\frac{9+\sqrt{17}}{8}, 3\right[$$

où l'égalité résulte de $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < \frac{9+\sqrt{17}}{8} < 3$.

(d) On peut résumer ce qu'on vient de faire par le tableau :

x		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		3	
(3)	satisfaite		satisfaite dans $\left[\frac{9+\sqrt{17}}{8}, 3\right[$		pas satisfaite

On trouve donc finalement que

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x \in \left[\frac{9+\sqrt{17}}{8}, 3\right[$$

ou encore, en termes d'ensembles,

$$A = \left]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left[\frac{9+\sqrt{17}}{8}, 3\right[.$$