Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. À partir des règles de base sur les inégalités, pour rappel : /4

$$\text{pour tout } x,y \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \Rightarrow x+y \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\text{pour tout } x,y \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \Rightarrow x \cdot y \geqslant 0 \tag{2}$$

et de la définition « $x \leqslant y$ si et seulement si $y - x \geqslant 0$ », montrez que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) pour tout $z \geqslant 0$, $x \leqslant y \Rightarrow xz \leqslant yz$.

(b) $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit le système /4

$$\begin{cases} x\sin\theta + y\cos\theta = \frac{1}{2}\pi \\ -x\cos\theta + y\sin\theta = \pi^{-1} \end{cases}$$

où les inconnues sont x, y et θ est un paramètre réel. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de θ le système possède une unique solution. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Question 3. Calculez /4

- $\sum_{i=-1}^{n} i =$

- $\sum_{i=1}^{n} (i - j) =$

- $\sum_{t=3}^{\ell} (\ell + t^2 - 2t) =$

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Pour chacune des relations ci-dessous, dites s'il s'agit ou non d'une fonction. Justifiez votre réponse par une argumentation concise mais précise. /7,5

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y \geqslant 0$ et $y^3 = x$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $\operatorname{tg} y = x$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $xy = 0$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y \geqslant 0$ et $\sqrt{y} = x$

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w$ tel que $w^3 = z$

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2006)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soient les deux ensembles suivants : /5

$$A = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta) \text{ est une solution du système } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$B = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v) \text{ est orthogonal à } \left(1, \frac{3}{2}\right) \right\}$$

(a) Montrez que A est contenu dans B.

(b) A-t-on $A = B$? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 4 (9 octobre 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Calculez $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Exprimez le résultat en utilisant la notion de modulo. $/5$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. /5

(a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la ou les droites D_1 passant par $(0,1,2)$ et parallèle au plan $\alpha \equiv z = x$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel λ les plans $\alpha \equiv \lambda^2 + 3y - 8z = 3$ et $\beta \equiv 2x - \lambda y - \lambda z = 2$ sont-ils perpendiculaires. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et /8

$$aX + bY = 0 \tag{3}$$

l'équation d'une droite passant par $(0,0)$.

(a) Prouvez que si (x_1,y_1) et (x_2,y_2) sont solutions de (3), alors $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$ en est aussi solution.

(b) Soit $c \in \mathbb{R}$. Prouvez que si (x_1,y_1) est solution de (3) et si (u,v) est solution de l'équation

$$aX + bY = c \tag{4}$$

alors $(x_1,y_1)+(u,v)$ est aussi solution de (4).

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite).

(c) Soit (u, v) une solution fixée de $aX + bY = c$. Prouvez que toute solution de $aX + bY = c$ est de la forme

$$(x, y) + (u, v) \quad \text{où } (x, y) \text{ est solution de (3).}$$

Interprétez géométriquement ce résultat.