Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2006) **Correction**

Question 1. *À partir des règles de base sur les inégalités, pour rappel :*

$$\text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \Rightarrow x + y \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \Rightarrow x \cdot y \geqslant 0 \tag{2}$$

et de la définition « $x \leqslant y$ si et seulement si $y - x \geqslant 0$ », montrez que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) *pour tout $z \geqslant 0$, $x \leqslant y \Rightarrow xz \leqslant yz$.*

(b) $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$.

(a) Soit $z \geqslant 0$ et $x \leqslant y$. On doit prouver que $xz \leqslant yz$ ou encore, d'après la définition, $yz - xz \geqslant 0$. Comme par hypothèse, on a $z \geqslant 0$ et $y - x \geqslant 0$, la règle (2) implique que $(y - x)z \geqslant 0$ c'est-à-dire $yz - xz \geqslant 0$ comme recherché.

(b) Soit $0 \leqslant x \leqslant y$. Par transitivité, on a $y \geqslant 0$. La règle (1) implique alors que $x + y \geqslant 0$. L'hypothèse $x \leqslant y$ veut dire, par définition, $y - x \geqslant 0$. Par conséquent, la règle (2) implique que le produit des deux termes positifs $y + x$ et $y - x$ est $\geqslant 0$, c'est-à-dire que $y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) \geqslant 0$. Donc, par définition, $x^2 \leqslant y^2$.

RÉSOLUTION ALTERNATIVE : Comme $x \leqslant y$ et que $x \geqslant 0$, le point (a) implique que $x^2 = x \cdot x \leqslant yx$. De même, de $x \leqslant y$ et $y \geqslant 0$, on déduit par le point (a) que $xy \leqslant y \cdot y \leqslant y^2$. On a donc $x^2 \leqslant xy \leqslant y^2$ et la transitivité implique alors que $x^2 \leqslant y^2$.

Question 2. *Soit le système*

$$\begin{cases} x \sin\theta + y \cos\theta = \frac{1}{2}\pi \\ -x \cos\theta + y \sin\theta = \pi^{-1} \end{cases}$$

où les inconnues sont x, y et θ est un paramètre réel. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de θ le système possède une unique solution. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Le système possède une unique solution si et seulement si son déterminant est non nul. Or on a : $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$. En conclusion, le système donné a une unique solution quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Question 3. *Calculez*

- $\displaystyle\sum_{i=-1}^{n} i = -1 + \sum_{i=0}^{n} i = -1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2}$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i-j) = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - jn = \frac{n(n+1-2j)}{2}$
- $$\begin{aligned}\sum_{t=3}^{\ell} (\ell + t^2 - 2t) &= \sum_{t=3}^{\ell} \ell + \sum_{t=3}^{\ell} t^2 - 2\sum_{t=3}^{\ell} t \\ &= \ell(\ell-2) + \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} - 4 - 1 - 2\Big(\frac{\ell(\ell+1)}{2} - 2 - 1\Big) \\ &= \ell(\ell-2) + \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} - \ell(\ell+1) + 1 \\ &= \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} - 3\ell + 1\end{aligned}$$

Question 4. *Pour chacune des relations ci-dessous, dites s'il s'agit ou non d'une fonction. Justifiez votre réponse par une argumentation concise mais précise.*

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y \geqslant 0$ *et* $y^3 = x$

  f est une fonction. En effet, étant donné $x \in \mathbb{R}$, le seul y qui vérifie $y^3 = x$ est $y = \sqrt[3]{x}$. Comme la condition $y \geqslant 0$ ne va pas ajouter de nouvelles solutions y mais seulement rejeter les $y < 0$, on a bien qu'à chaque x, correspond au plus un y.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $\operatorname{tg} y = x$

  f n'est pas une fonction. En effet, si $x = 0$ (par exemple), alors l'équation $\operatorname{tg} y = x$ a pour solutions $y = 0$, $y = \pi$, $y = -\pi, \dots$ Comme il y a plusieurs solutions distinctes, on n'a pas unicité du y pour $x = 0$.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $xy = 0$

  f n'est pas une fonction. En effet, pour $x = 0$, tous les $y \in \mathbb{R}$ sont solution de $0 \cdot y = 0$. Par conséquent, à $x = 0$, il y a plus d'un y qui est en relation avec lui.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y \geqslant 0$ *et* $\sqrt{y} = x$

  f est une fonction. En effet, étant donné $x \in \mathbb{R}$, la seule solution de $\sqrt{y} = x$ est $y = x^2$ (si deux quantités sont égales, leur carré le sont aussi).

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w$ *tel que* $w^3 = z$

  f n'est pas une fonction. En effet, si on considère (par exemple) $z = 1$, l'équation $w^3 = 1$ possède 3 solutions distinctes : $w = 1$, $w = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $w = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$. Par conséquent, on n'a pas unicité du w qui correspond à $z = 1$.

Question 5. *Soient les deux ensembles suivants :*

$$A = \left\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha,\beta) \text{ est une solution du système } \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 5x-7y=0 \end{cases} \right\}$$

$$B = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : (u,v) \text{ est orthogonal à } \left(1,\frac{3}{2}\right) \right\}$$

(a) *Montrez que A est contenu dans B.*

(b) *A-t-on $A = B$? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(a) Montrer que $A \subseteq B$ revient à montrer que tout élément de A est un élément de B.

Soit $(\alpha,\beta) \in A$, c'est-à-dire (α,β) est solution du système donné, ce qui se traduit par : $2\alpha+3\beta=0$ et $5\alpha-7\beta=0$. Montrons que $(\alpha,\beta) \in B$ c'est-à-dire que (α,β) est orthogonal à $(1,\frac{3}{2})$, ce qui se traduit par $\big((\alpha,\beta) \mid (1,\frac{3}{2})\big)=0$, c'est-à-dire $\alpha+\frac{3}{2}\beta=0$, ou encore $2\alpha+3\beta=0$. Cette relation est satisfaite car on retrouve une des deux relations qui expriment que $(\alpha,\beta)\in A$. Donc, on a bien $A \subseteq B$.

(b) On a vu que $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Il s'agit donc de regarder ici la seconde inclusion. Nous allons montrer que $B \nsubseteq A$, c'est-à-dire qu'il existe un élément de B qui n'appartient pas à A. Cela revient donc à donner $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(u,v)\in B$ et $(u,v)\notin A$.

Prenons $(u,v)=(3,-2)$.

On a $(u,v)\in B$ car $\big((3,-2) \mid (1,\frac{3}{2})\big)=3-3=0$. Mais $(u,v)\notin A$ car (u,v) ne vérifie pas la seconde équation du système. En effet, $5\cdot 3-7\cdot(-2)=15+14=29\neq 0$.

En conclusion, on n'a pas $A = B$.

Question 6. *Calculez $\big(\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\big)^n$, $n\in\mathbb{Z}$. Exprimez le résultat en utilisant la notion de modulo.*

On a $\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. Donc $\big(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\big)^8=\operatorname{cis}2\pi=1$. Par conséquent, si $n=q\cdot 8+r$ où $q\in\mathbb{Z}$, et $r\in\{0,1,\dots,7\}$ (division de n par 8), on a $\big(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\big)^{q8+r}=\operatorname{cis}\big((q8+r)\frac{\pi}{4}\big)$ (par la formule de De Moivre appliquée pour $n\in\mathbb{Z}$, comme vu au cours). Donc

$$\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^n=\operatorname{cis}\left(q\cdot 8\cdot\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{cis}\left(r\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{cis}(q2\pi)\cdot\operatorname{cis}\left(r\frac{\pi}{4}\right)=1\cdot\operatorname{cis}\left(r\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{cis}\left((n \bmod 8)\frac{\pi}{4}\right)$$

puisque n est, par définition, égal à n mod 8.

Question 7.

(a) *Donnez un système d'équations cartésiennes de la ou les droites D_1 passant par $(0,1,2)$ et parallèle au plan $\alpha \equiv z = x$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Comme $\alpha \equiv x - z = 0$, un vecteur normal de α est $(1,0,-1)$. Puisque D_1 est une droite parallèle à α, $(1,0,-1)$ est aussi un vecteur normal de D_1. Un vecteur directeur de D_1 est alors un vecteur (x_1,y_1,z_1) tel que $\big((x_1,y_1,z_1) \mid (1,0,-1)\big) = 0$, c'est-à-dire que ce vecteur vérifie la relation $x_1 - z_1 = 0$ ou encore $x_1 = z_1$. Il existe donc une infinité de vecteurs directeurs possibles pour D_1 ; ces vecteurs sont de la forme (x_1,y_1,x_1) avec $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ et x_1 et y_1 non-nuls simultanément.

Par conséquent, il existe une infinité de droites passant par $(0,1,2)$ et parallèles au plan α. Une équation paramétrique de ces droites est

$$(x,y,z) = (0,1,2) + \lambda(x_1,y_1,x_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où $(x_1,y_1) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ sont les paramètres décrivant la famille.

- Si $x_1 \neq 0$ et $y_1 \neq 0$, alors un système d'équations cartésiennes de ces droites est

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y-1}{y_1} = \frac{z-2}{x_1}$$

- Si $x_1 = 0$ (et donc $y_1 \neq 0$), alors un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Si $y_1 = 0$ (et donc $x_1 \neq 0$), alors un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 2 + x \end{cases}$$

(b) *Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel λ les plans $\alpha \equiv \lambda^2 + 3y - 8z = 3$ et $\beta \equiv 2x - \lambda y - \lambda z = 2$ sont-ils perpendiculaires. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Les deux plans α et β sont orthogonaux si et seulement si un vecteur normal de α est orthogonal à un vecteur normal de β. Or un vecteur normal de α (resp. de β) se lit sur son équation, il s'agit des coefficients de x, y et z : $(0,3,-8)$ (resp. $(2,\lambda,-\lambda)$. Donc $\alpha \perp \beta$ si et seulement si $\big((0,3,-8) \mid (2,\lambda,-\lambda)\big) = 0$, i.e., $3\lambda + 8\lambda = 0$ i.e., $\lambda = 0$.

Question 8. *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et*

$$aX + bY = 0 \tag{3}$$

l'équation d'une droite passant par $(0,0)$.

(a) *Prouvez que si (x_1,y_1) et (x_2,y_2) sont solutions de (3), alors $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$ en est aussi solution.*

Par hypothèse, on a $ax_1 + by_1 = 0$ et $ax_2 + by_2 = 0$. En sommant membre à membre, on obtient $a(x_1+x_2) + b(y_1+y_2) = 0$ ou encore que (x_1+x_2, y_1+y_2) est solution de $aX + bY = 0$. Puisque $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, on a le point (a).

(b) *Soit $c \in \mathbb{R}$. Prouvez que si (x_1, y_1) est solution de (3) et si (u, v) est solution de l'équation*

$$aX + bY = c \tag{4}$$

alors $(x_1, y_1) + (u, v)$ est aussi solution de (4).

Par hypothèse $ax_1 + by_1 = 0$ et $au + bv = c$. En sommant membre à membre, on obtient $a(x_1 + u) + b(y_1 + u) = c$, ce qui, en raisonnant comme en (a) prouve (b).

(c) *Soit (u, v) une solution fixée de $aX + bY = c$. Prouvez que toute solution de $aX + bY = c$ est de la forme*

$$(x, y) + (u, v) \quad \textit{où } (x, y) \textit{ est solution de } (3).$$

Interprétez géométriquement ce résultat.

Soit (x', y') une solution de $aX + bY = c$, c'est-à-dire $ax' + by' = c$. Par hypothèse, $au + bv = c$. En soustrayant membre à membre et en raisonnant comme en (a) et (b), on obtient que $(x' - u, y' - v)$ est solution de $aX + bY = 0$. Posons $x = x' - u$ et $y = y' - v$ et on a prouvé que (x', y') est bien somme d'une solution (x, y) de (3) et de (u, v).

Géométriquement, on a