Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $w \in \mathbb{C}$ et soit α une solution de $X^n = w$. Prouvez que toute solution de $X^n = w$ est le produit de α avec une solution de $X^n = 1$. /4

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. /5

(a) Calculer

- $\sum_{i=-2}^{200} (i+1) =$

- $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i =$

(b) Soit la fonction $\delta(i, j)$ de Kronecker définie par

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Calculer $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta(i, j)$. Expliquez votre démarche.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2006)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Prouvez par récurrence que /5

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

Question 4. Prouvez que les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sont équivalentes en dressant leurs tables de vérité. /3

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Calculez, si possible, /3

- $\boldsymbol{i} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & (1+\boldsymbol{i})^2 \\ \boldsymbol{i}^{-4} & -\boldsymbol{i}+4 \end{pmatrix} =$

- $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} =$

Question 6. Esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 + x^3$. Expliquez votre démarche. /3

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par $a_{ij} = (i+j)^2(i^3 - j^3)$. $\big/ 4$

(a) Montrez que la matrice A est antisymétrique.

(b) Utilisez le point précédent pour calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2(i^3-j^3)$$

Expliquez votre démarche.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Recherchez l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) qui sont orthogonaux à la fois aux vecteurs $(2, 1, 3)$ et $(-1, 0, 5)$. Décrivez géométriquement cet ensemble. /4

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 9. Soient $E \in \mathbb{R}^{s\times r}$, $F \in \mathbb{R}^{r\times s}$ et $G \in \mathbb{R}^{s\times t}$. Montrez la propriété suivante :

$$(E^t + F)G = E^t G + FG$$

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.