Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2006)

Correction

Question 1. *Soit $w \in \mathbb{C}$ et soit α une solution de $X^n = w$. Prouvez que toute solution de $X^n = w$ est le produit de α avec une solution de $X^n = 1$.*

Soit β une solution quelconque de $X^n = w$. Nous devons montrer que β est le produit de α par une solution de l'équation $X^n = 1$.

Clairement, si $w \neq 0$, α sera non nul. On peut donc diviser par α et écrire $\beta = \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha}$. Il reste à prouver que $\frac{\beta}{\alpha}$ est une solution de $X^n = 1$, c'est-à-dire que $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 1$. On a $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = \frac{\beta^n}{\alpha^n} \overset{(*)}{=} \frac{w}{w} = 1$ où $(*)$ est justifié par le fait que α et β sont des solutions de $X^n = w$.

Si $w = 0$, alors la seule solution dans $\mathbb{C}$ de $X^n = 0$ est 0 car les puissances n-ièmes d'un complexe z non nul sont toujours non nulles (calculer $|z^n|$ pour s'en convaincre). Dans ce cas, on peut toujours écrire $0 = 0 \cdot \lambda$ avec $\lambda^n = 1$.

Question 2.

(a) *Calculer*

- $$\begin{aligned}\sum_{i=-2}^{200}(i+1) &= \sum_{i=-2}^{200} i + \sum_{i=-2}^{200} 1 \\ &= \frac{200\cdot 201}{2} + (-2) + (-1) + 203 \\ &= \frac{200\cdot 201}{2} + 200 = \frac{200\cdot 203}{2} = 20300\end{aligned}$$
- $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} ni = n\sum_{i=1}^{n} i = n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

(b) *Soit la fonction $\delta(i,j)$ de Kronecker définie par*

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta(i,j)$. Expliquez votre démarche.

Considérons la matrice associée à la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta(i,j)$: il s'agit par définition de $\delta(i,j)$ de la matrice identité de type $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vu que calculer la somme revient à sommer tous les éléments de la matrice, cette somme est égale à n (on somme les n éléments 1 de la diagonale).

Question 3. *Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Prouvez par récurrence que*

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \tag{1}$$

Remarquons tout d'abord que, puisque $z \neq 1$ par hypothèse, le membre de droite de (1) a un sens : l'inverse de $z-1$ existe.

La formule (1) se réduit dans la cas où $n = 0$ à $z^0 = \frac{z^1-1}{z-1}$. Puisque $z^0 = 1$ et que par hypothèse $z \neq 1$, on a l'égalité. Ceci prouve le cas initial.

Pour l'étape de récurrence, supposons que la formule soit vraie pour tout n tel que $0 \leqslant n \leqslant k$; montrons que, sous cette hypothèse, la formule est vraie pour $n = k+1$. Le premier membre devient pour $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} z^i &= \sum_{i=0}^{k} z^i + z^{k+1} \\
&= \frac{z^{k+1}-1}{z-1} + z^{k+1} && \text{par hypothèse de récurrence } (n = k) \\
&= \frac{z^{k+1}-1+(z-1)z^{k+1}}{z-1} \\
&= \frac{z^{k+2}-1}{z-1}
\end{aligned}$$

Il est donc bien égal au second membre de (1).

Question 4. *Prouvez que les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sont équivalentes en dressant leurs tables de vérité.*

La table de vérité de ces deux propositions est :

P	0		1	
Q	0	1	0	1
$P \Rightarrow Q$	1	1	0	1
$\neg Q$	1	0	1	0
$\neg P$	1	1	0	0
$\neg Q \Rightarrow \neg P$	1	1	0	1

On constate que les lignes correspondant aux formules « $P \Rightarrow Q$ » et « $\neg Q \Rightarrow \neg P$ » sont identiques, c'est-à-dire que les deux formules sont équivalentes.

Question 5. *Calculez, si possible,*

- $\boldsymbol{i}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & (1+\boldsymbol{i})^2\\ \boldsymbol{i}^{-4} & -\boldsymbol{i}+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{i}\cdot(1+\boldsymbol{i})^2\\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}^{-4} & \boldsymbol{i}\cdot(-\boldsymbol{i}+4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & \boldsymbol{i}\cdot(2\boldsymbol{i})\\ \boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{i}^4)^{-1} & -\boldsymbol{i}^2+4\boldsymbol{i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ \boldsymbol{i} & 1+4\boldsymbol{i}\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}$ impossible car le nombre de colonnes de la 1re matrice (ici 3) est différent du nombre de lignes de la seconde matrice (ici 2).

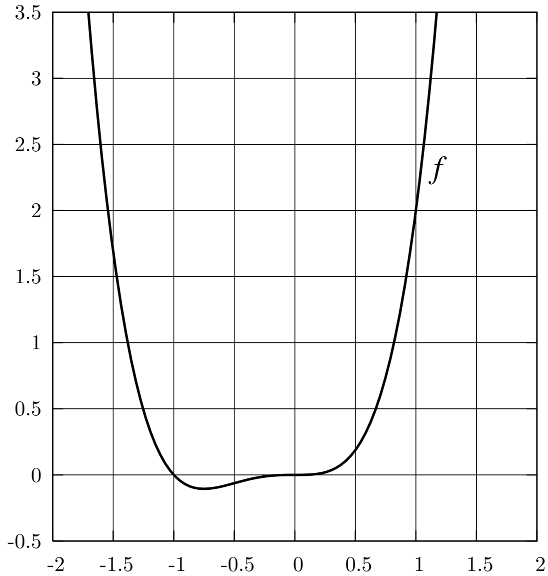
- $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-5)-1\cdot 4+5\cdot 6\\ 0+4\cdot 4-2\cdot 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\ 4\end{pmatrix}$

Question 6. *Esquissez le graphe de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto x^4+x^3$. Expliquez votre démarche.*

Pour commencer, on peut remarquer que la fonction f est définie pour tout x ; son domaine est donc $\mathbb{R}$.

- Comme on peut écrire $f(x)=x^3(x+1)$, les racines de f sont 0 et -1.
- Lorsque $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$, c'est le terme x^4 qui est immensément plus grand que le terme x^3 et donc $f(x)\approx x^4$.
- Lorsque $x\approx 0$, c'est le terme en x^3 qui domine celui en x^4 et donc $f(x)\approx x^3$. En particulier ceci implique que f possède une tangente horizontale en $x=0$ puisque c'est le cas pour x^3.

On esquisse le graphe de f en reliant les graphes correspondant aux comportements asymptotiques de f au voisinage de $\pm\infty$ et de 0.



Question 7. *Soit $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ définie par $a_{ij}=(i+j)^2(i^3-j^3)$.*

(a) *Montrez que la matrice A est antisymétrique.*

Cela revient à montrer que $A^t=-A$. Posons $A^t=(a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. On doit donc montrer que

$$\forall i=1,\dots,n,\ \forall j=1,\dots,n,\quad a'_{ij}=-a_{ij}$$

On a

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ji} && \text{par définition de la transposée}\\ &= (j+i)^2(j^3-i^3) && \text{par définition de } A\\ &= -(i+j)^2(i^3-j^3)\\ &= -a_{ij}\end{aligned}$$

(b) *Utilisez le point précédent pour calculer*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2(i^3-j^3)$$

Expliquez votre démarche.

On a vu au cours que calculer cette double somme revient à additionner tous les éléments de la matrice A de type $n\times n$ définie par $a_{ij}=(i+j)^2(i^3-j^3)$. Comme cette matrice est antisymétrique, on a

$$a_{ii}=0 \quad \text{et} \quad a_{ij}=-a_{ji}$$

Par conséquent, la double somme vaut 0.

Question 8. *Recherchez l'ensemble des vecteurs* (x_1,x_2,x_3) *qui sont orthogonaux à la fois aux vecteurs* $(2,1,3)$ *et* $(-1,0,5)$. *Décrivez géométriquement cet ensemble.*

On a vu que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Ici, les vecteurs (x_1,x_2,x_3) sont donc tels que

$$2x_1+x_2+3x_3=0 \quad \text{et} \quad -x_1+5x_3=0.$$

Nous somme donc amenés à résoudre le système

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=0\\-x_1+5x_3=0\end{cases}$$

De la deuxième équation, on a $x_1=5x_3$ et en remplaçant dans la première, on trouve $x_2=-13x_3$. L'ensemble recherché est donc

$$\{(5\lambda,-13\lambda,\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}$$

Il s'agit de la droite dont une équation paramétrique est

$$(x,y,z)=(5\lambda,-13\lambda,\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Cette droite passe par $(0,0,0)$ et a pour vecteur directeur $(5,-13,1)$.

Question 9. *Soient $E \in \mathbb{R}^{s\times r}$, $F \in \mathbb{R}^{r\times s}$ et $G \in \mathbb{R}^{s\times t}$. Montrez la propriété suivante :*

$$(E^t + F)G = E^tG + FG \tag{2}$$

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Posons $E^t = (e_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant s}}$, $F = (f_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant s}}$, $G = (g_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ 1\leqslant j\leqslant t}}$, $A = E^t + F = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant s}}$. On a donc $a_{ij} = e_{ij} + f_{ij}$. Les matrices dans chaque membre de (2) sont de type $r \times t$. On doit montrer que

$$\forall i = 1,\ldots,r,\ \forall j = 1,\ldots,t, \quad (AG)_{ij} = (E^tG+FG)_{ij}.$$

Le premier membre vaut

$$\begin{aligned}
(AG)_{ij} &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}g_{kj} && \text{par définition du produit matriciel}\\
&= \sum_{k=1}^{s} (e_{ik}+f_{ik})g_{kj} && \text{par définition de la matrice } A\\
&= \sum_{k=1}^{s} (e_{ik}g_{kj}+f_{ik}g_{kj}) && \text{par distributivité dans } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Le second membre vaut

$$\begin{aligned}
(E^tG+FG)_{ij} &= (E^tG)_{ij} + (FG)_{ij} && \text{par définition de la somme de deux matrices}\\
&= \sum_{k=1}^{s} e_{ik}g_{kj} + \sum_{k=1}^{s} f_{ik}g_{kj} && \text{par définition du produit matriciel}\\
&= \sum_{k=1}^{s} (e_{ik}g_{kj}+f_{ik}g_{kj}) && \text{par commutativité et associativité dans } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Les deux membres sont donc bien égaux.