Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (23 octobre 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (math, phys, ou info) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supposons que B soit une matrice inversible. Montrez que $AB^{-1} = B^{-1}A$ si et seulement si $AB = BA$. /4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soient les vecteurs $v_1 = (-2,9,6)$, $v_2 = (-3,2,1)$ et $v_3 = (1,7,5)$. Existe-t-il des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que /5

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0\ ?$$

Si oui, donnez les tous. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 3. Trouvez la matrice M dont l'inverse est /4

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Calculez, en détaillant vos calculs : /5

- $\partial_x\big(\operatorname{arctg}(\sin x^2)\big) =$

- $\partial_x(x^\alpha) =$

- $\partial_\alpha(x^\alpha) =$

- $\partial_x\Big(\sum_{i=0}^{n} x^i\Big)\Big|_{x=1} =$

Question 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction différentiable et inversible telle que son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto f^{-1}(s)$ soit aussi différentiable. Donnez et prouvez une formule qui exprime $\partial_s f^{-1}(s)$ en fonction de $\partial_t f(t)$ pour un t bien choisi. /4

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (23 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soit $n \geqslant 0$ un naturel fixé. Prouver que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, /4

$$\sum_{j=0}^{\ell} \binom{n+j}{j} = \binom{n+1+\ell}{\ell}$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (23 octobre 2006)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soients les matrices $M, N \in \mathbb{R}^{p \times p}$ définies par

$$M_{ij} = j - i \quad \text{et} \quad N_{ij} = i + j$$

Considérons la matrice $S \in \mathbb{R}^{p \times p}$ définie par $S = MN$. Calculez $\sum_{i=1}^{p} S_{ii}$.

/3

Question 8. Montrez que $\big(P \wedge (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q$ est une tautologie.

/3

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (23 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Échelonnez la matrice suivante en discutant en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$: /5

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (23 octobre 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Calculer les sommes suivantes : $/4$

- $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 1 =$

- $\sum_{n=0}^{t}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} =$

- $\sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell}{i}2^{i} =$

Question 11. Soit $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \exists\lambda \in \mathbb{R},\ z = \boldsymbol{i} + \lambda \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right\}$. Tracer D dans le plan complexe. Justifiez votre démarche. $/3$