Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (23 octobre 2006) **Correction**

Question 1. *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supposons que B soit une matrice inversible. Montrez que $AB^{-1} = B^{-1}A$ si et seulement si $AB = BA$.*

On a $AB^{-1} = B^{-1}A$ ssi $AB^{-1}B = B^{-1}AB$ (multiplication à droite par B dans chaque membre[1])
ssi $A = B^{-1}AB$ (par définition de l'inverse, on a $B^{-1}B = \mathbb{1}$ et $A\mathbb{1} = A$)
ssi $BA = BB^{-1}AB$ (multiplication à gauche par B dans chaque membre[2])
ssi $BA = AB$ (par définition de l'inverse, $B^{-1}B = \mathbb{1}$)

Question 2. *Soient les vecteurs $v_1 = (-2,9,6)$, $v_2 = (-3,2,1)$ et $v_3 = (1,7,5)$. Existe-t-il des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \ ?$$

Si oui, donnez les tous. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

On cherche des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\alpha_1(-2,9,6) + \alpha_2(-3,2,1) + \alpha_3(1,7,5) = (0,0,0)$$

En utilisant les opérations sur les vecteurs et l'égalité entre deux vecteurs, on est amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 9\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Échelonnons la matrice augmentée du système :

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 9 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1/(-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -23/2 & 23/2 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 9L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2/(-2/23) \\ L_3 \leftarrow L_3/(-8) \end{array}$$

[1] Rappelons que c'est une équivalence parce que B est inversible. En effet, si $X = Y$, alors on a toujours $XB = YB$. L'implication $XB = YB \Rightarrow X = Y$ est vraie lorsque B est inversible (car on peut alors écrire $XB = YB \Rightarrow X = XBB^{-1} = YBB^{-1} = Y$).

[2] De nouveau, on a l'équivalence car B est inversible. (Les détails vous sont laissés.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

La deuxième ligne correspond à l'équation $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, c'est-à-dire $\alpha_2 = \alpha_3$.
La première ligne correspond à l'équation $\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 = 0$, c'est-à-dire $\alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_3 = -\alpha_3$.
En conclusion, il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Ces réels sont tels que pour $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, on a $\alpha_1 = -\alpha_3$ et $\alpha_2 = \alpha_3$.

REMARQUE : Si d'emblée on voit que $v_1 = (-2,9,6)$ est la somme de $v_2 = (-3,2,1)$ et de $v_3 = (1,7,5)$, alors on peut en déduire immédiatement le résultat : en effet $v_1 = v_2 + v_3$ implique que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $-\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 = 0$. Reste à voir qu'il n'y a pas d'autres possibilités. Pour cela commençons par remarquer que pour n'importe quel $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, il y a *au plus un* couple $(\beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = w$. C'est évident car si on regarde la système correspondant aux deux premières composantes de cette égalité, on obtient

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

et le déterminant de la matrice de ce système est non-nul. Supposons maintenant que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$.

- Si $\alpha_1 = 0$, alors l'équation devient $\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ ce qui implique que $(\alpha_2, \alpha_3) = (0,0)$ (vu que $(0,0)$ est une solution, c'est la seule en vertu de la remarque faite). Ceci correspond au cas $\lambda = 0$.
- Si $\alpha_1 \neq 0$, alors l'équation peut se réécrire $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3$, ce qui implique que $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1$ et $-\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 1$ (de nouveau, on a vu que $v_1 = v_2 + v_3$ et on a montré l'unicité des solutions). Donc $\alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3$ ce qui correspond à $\lambda = -\alpha_1$.

Question 3. *Trouvez la matrice M dont l'inverse est*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche la matrice M telle que $M \cdot M^{-1} = \mathbb{1}$. Par définition de l'inverse, on en déduit que

$M = (M^{-1})^{-1}$. Cherchons donc l'inverse de M^{-1} par la méthode de la matrice compagnon.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2/4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{3}{2}L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$

On en déduit que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

VÉRIFICATION : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 4. *Calculez, en détaillant vos calculs :*

- $$\partial_x\big(\mathrm{arctg}(\sin x^2)\big) = \partial_y\big(\mathrm{arctg}\, y\big)\big|_{y=\sin x^2}\, \partial_x(\sin x^2) = \frac{1}{1+y^2}\Big|_{y=\sin x^2}\, \partial_z\big(\sin z\big)\big|_{z=x^2}\, \partial_x(x^2)$$
$$= \frac{1}{1+\sin^2 x^2}\,(\cos z)|_{z=x^2}\, 2x = \frac{2x\cos x^2}{1+\sin^2 x^2}$$
- $$\partial_x(x^\alpha) = \partial_x\big(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\big) = \partial_y\big(\mathrm{e}^y\big)\big|_{y=\alpha\ln x}\, \partial_x(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{e}^{\alpha\ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$
- $$\partial_\alpha(x^\alpha) = \partial_\alpha\big(\mathrm{e}^{\alpha\ln x}\big) = \partial_y\big(\mathrm{e}^y\big)\big|_{y=\alpha\ln x}\, \partial_\alpha(\alpha\ln x)\,\mathrm{e}^{\alpha\ln x}\ln x = x^\alpha \ln x$$
- $$\partial_x\Big(\sum_{i=0}^n x^i\Big)\Big|_{x=1} = \partial_x\Big(1 + \sum_{i=1}^n x^i\Big)\Big|_{x=1} = \Big(\sum_{i=1}^n \partial_x x^i\Big)\Big|_{x=1} = \Big(\sum_{i=1}^n i x^{i-1}\Big)\Big|_{x=1} = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Question 5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction différentiable et inversible telle que son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto f^{-1}(s)$ soit aussi différentiable. Donnez et prouvez une formule qui exprime $\partial_s f^{-1}(s)$ en fonction de $\partial_t f(t)$ pour un t bien choisi.*

On va montrer que

$$\partial_s f^{-1}(s) = \frac{1}{\partial_t f(f^{-1}(s))} \tag{1}$$

Par définition de la fonction inverse, on a

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(f(t)) = t \\ &\forall s \in \mathbb{R}, \quad f(f^{-1}(s)) = s \end{aligned} \tag{2}$$

Puisque les fonctions $s \mapsto f(f^{-1}(s))$ et $s \mapsto s$ sont égales en vertu de (2), leurs dérivées le sont aussi, si bien que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad 1 = \partial_s(s) = \partial_s\big(f(f^{-1}(s))\big) = \partial_t f(f^{-1}(s)) \cdot \partial_s f^{-1}(s)$$

Par conséquent, que que soit $s \in \mathbb{R}$, $\partial_t f(f^{-1}(s)) \neq 0$. On peut donc diviser par cette quantité pour obtenir (1).

Question 6. *Soit $n \geqslant 0$ un naturel fixé. Prouver que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{j=0}^{\ell} \binom{n+j}{j} = \binom{n+1+\ell}{\ell} \tag{3}$$

<u>Cas de base $\ell = 0$</u> : Le membre de gauche vaut $\sum_{j=0}^{0} \binom{n+j}{j} = \binom{n+0}{0} = 1$. Le membre de droite vaut $\binom{n+1}{0} = 1$. Les deux membres sont donc bien égaux ce qui prouve l'égalité (3) pour $\ell = 0$.
<u>Pas récursif</u> : Supposons que (3) soit vrai pour tout $\ell \leqslant m$ et prouvons que (3) soit vrai pour $m+1$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{n+j}{j} &= \sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{j} + \binom{n+m+1}{m+1} \\ &= \binom{n+1+m}{m} + \binom{n+m+1}{m+1} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \binom{n+1+m+1}{n+1} \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la formule $\binom{\alpha}{\beta-1} + \binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha+1}{\beta}$ avec $\alpha = n+1+m$ et $\beta = m+1$. Comme $\binom{n+1+m+1}{m+1}$ est le membre de droite de (3) pour $\ell = m+1$, la preuve est terminée.

Question 7. *Soient les matrices $M,N \in \mathbb{R}^{p\times p}$ définies par*

$$M_{ij} = j - i \quad et \quad N_{ij} = i + j$$

Considérons la matrice $S \in \mathbb{R}^{p\times p}$ définie par $S = MN$. Calculez $\sum_{i=1}^{p} S_{ii}$.

Par définition du produit matriciel, on a $S_{ii} = \sum_{k=1}^{p} M_{ik}N_{ki}$. Donc

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \sum_{k=1}^{p} (k-i)\cdot(k+i) && \text{(par définition de } M_{ij} \text{ et } N_{ij}) \\ &= \sum_{k=1}^{p} (k^2 - i^2) \\ &= \sum_{k=1}^{p} k^2 - \sum_{k=1}^{p} i^2 \\ &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} - pi^2 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} S_{ii} &= \sum_{i=1}^{p} \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} - p\sum_{i=1}^{p} i^2 \\ &= \frac{p^2(p+1)(2p+1)}{6} - \frac{p^2(p+1)(2p+1)}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

REMARQUE : on pouvait conclure plus rapidement en écrivant

$$\sum_{i=1}^{p} S_{ii} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} (k-i)(k+i)$$

et en notant que la matrice $\big((k-i)(k+i)\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant p}}$ est antisymétrique.

Question 8. *Montrez que $\big(P \wedge (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q$ est une tautologie.*

Montrons que la table de vérité de cette proposition n'est constituée que de 1 :

P	1		0	
Q	1	0	1	0
$P \Rightarrow Q$	1	0	1	1
$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	1	0	0	0
$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$	1	1	1	1

Question 9. *Échelonnez la matrice suivante en discutant en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Utilisons les transformations élémentaires sur les lignes, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha^2-\alpha \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \tag{4}$$

- Si $1-\alpha^2 \neq 0$, c'est-à-dire si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\alpha} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\alpha \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2/(1-\alpha^2) \\ L_3 \leftarrow L_3/(1-\alpha) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\alpha} & 1 \\ 0 & 0 & -1-\frac{1}{1+\alpha} & -\alpha-1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

- Si $\alpha = 1$, la matrice obtenue en (4), à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  est échelonnée.
- Si $\alpha = -1$, la matrice obtenue en (4) est transformée comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Question 10. *Calculer les sommes suivantes :*

- $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} 1$

  Cette somme revient à additionner tous les éléments de la matrice triangulaire supérieure de type $n \times n$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

  (voyez-vous pourquoi ?). Il suffit donc de compter les nombre d'éléments valant 1 : il y en a n sur la première ligne, $n-1$ sur la seconde,..., et 1 sur la n^{e} ligne. La somme vaut donc $\sum_{j=1}^{n}(n-j+1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

  RÉSOLUTION ALTERNATIVE : On a

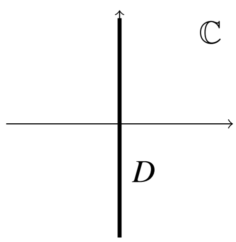
  $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} 1 &= \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) && \text{(il y a } n-j+1 \text{ éléments dans la 2}^{\mathrm{e}} \text{ somme)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k && \text{(en posant } k = n-j+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

- $\sum_{n=0}^{t} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{n=0}^{t} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{n=0}^{t} (1+1)^n = \sum_{n=0}^{t} 2^n = \frac{1-2^{t+1}}{1-2} = 2^{t+1}-1$
- $\sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} 2^i = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} 2^i 1^{\ell-i} = (2+1)^\ell = 3^\ell$

Question 11. *Soit* $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z = \boldsymbol{i} + \lambda \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \right\}$. *Tracer* D *dans le plan complexe. Justifiez votre démarche.*

La définition de D dit que $z \in D$ si et seulement si

$$z = \boldsymbol{i} + \lambda \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5}$$



Or (5) est une équation paramétrique de la droite passant par $\boldsymbol{i}$ et de vecteur directeur $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$. Comme les points de D sont précisément ceux qui vérifient (5), D est cette droite.

Pour la tracer, on remarque simplement que $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{i}$ et par conséquent D est confondue avec l'axe des imaginaires.