Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /3

- $\sum_{u=-3}^{v} u^2 =$

- $\sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=k+1}^{r} (\ell - k) =$

Question 2. Calculez $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j$. /2

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3.

/6

(a) Prouvez par récurrence que, pour $n \geqslant 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\sum_{\ell=0}^{n} t^{\ell}\right)(1-t) = 1 - t^{n+1}$$

(b) Calculez $\sum_{\ell=0}^{4n} \boldsymbol{i}^{\ell}$ où $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Expliquez et justifiez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Calculez et exprimez le résultat final sous forme trigonométrique. /3

- $\overline{1-\boldsymbol{i}} =$

- $(3-3\boldsymbol{i})^{-1} =$

- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

Question 5. Donnez la table de vérité de /4

$$A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C). \tag{1}$$

À partir de celle-ci, donnez une formule équivalente à (1) qui soit plus simple. Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Donnez, sous la forme d'une union d'intervalles disjoints, le domaine de définition de la fonction

/7

$$f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{x\sqrt{x+2}}\right)$$

INDICATION : Si un polynôme $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ vérifie $p(-1) = 0$, alors $p(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on peut trouver en résolvant un système linéaire.

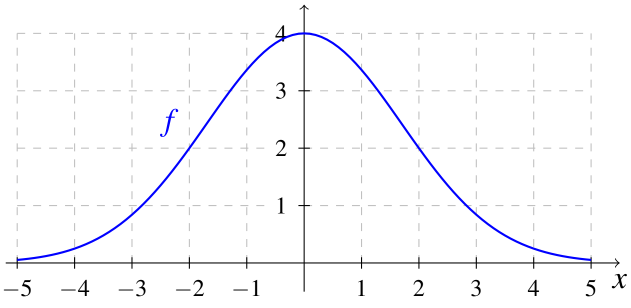
Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 7. Soit $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Écrivez l'ensemble $A = \left\{x \in [-5,5] : x \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 2\right\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche. /3



Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ -x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

/10

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = 2$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système pour $\lambda = 2$.

(d) Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :
Prénom :
Section :

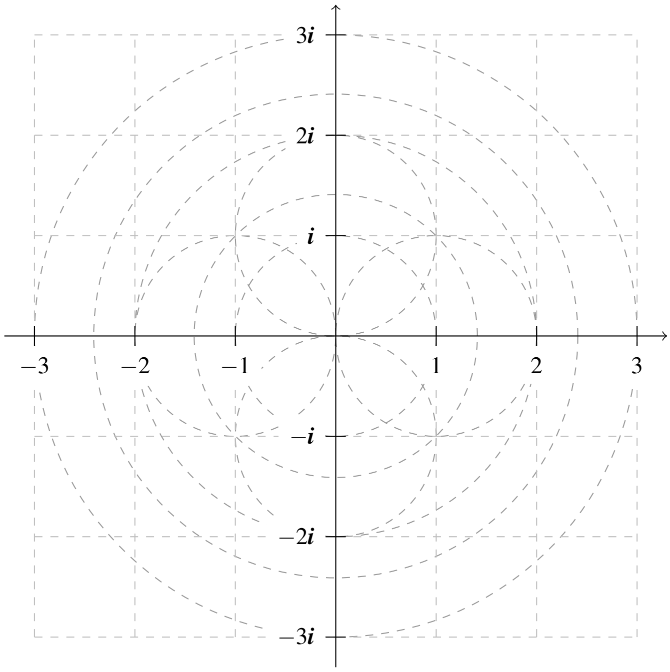
Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = -8$. Représentez les solutions trouvées dans le plan complexe. Expliquez votre démarche. $/5$



Question 10. Pour chacune des relations définies ci-dessous, dites s'il s'agit d'une fonction. Justifiez vos réponses. $/3$

- $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 = x$
- $g : \mathbb{R}^{2\times 2} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} : A \mapsto B$ tel que $B^3 = A$

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 11. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Recherchez la ou les matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle(s) que

$$A(X-B) = X(A+B) \tag{2}$$

Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12. Soient les matrices $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définies par /3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculez $\text{dét} A$ et $\text{dét} B$.

Question 13. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{x^2+\alpha x+1}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez α pour que la tangente au graphe de f en $x = 0$ passe par le point $(1, 1)$. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 14.

/4

(a) Recherchez l'ensemble A des vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $(1, -1, 2)$. Décrivez géométriquement l'ensemble A.

(b) Recherchez l'ensemble B des vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont simultanément orthogonaux aux vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(-2, 1, 4)$. Décrivez géométriquement l'ensemble B.

Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 15. Soit $f : \mathbb{R} \multimap\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par /6

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x \leqslant 2 \\ 7 - \sqrt{9-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Écrivez, sous forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est), l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ défini par $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant 4\}$.

Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2007)

Nom :

Prénom :

Section : Agrég math & phys

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Cet examen comporte une partie similaire à celle des étudiants de BAC 1 et une partie qui vous est propre. Pour réussir, il est nécessaire d'avoir la moyenne pour chacune de ces deux parties.
- Les explications et justifications de vos réponses doivent être conçues comme destinées à vos (futurs) élèves de secondaire. Nous vous recommendons d'êtres attentifs à ce point. Ceci ne doit cependant pas être utilisé comme excuse pour dire les choses uniquement intuitivement ou pour manquer de précision ou de rigueur.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /3

- $\sum_{u=-3}^{v} u^2 =$

- $\sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=k+1}^{r} (\ell - k) =$

Question 2. Calculez $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j$. /2

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

Question 3. /10

(a) Prouvez par récurrence que, pour $n \geqslant 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\sum_{\ell=0}^{n} t^{\ell}\right)(1-t) = 1 - t^{n+1}$$

(b) Déduisez de (a) que $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} (-u)^{\ell} = \frac{1+u^{n+1}}{1+u}$ si n est pair et $u \neq -1$.

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Question 3 (suite).

(c) Quelle sera la formule pour $\sum_{\ell=0}^{n} (-u)^{\ell}$ si n est impair et $u \neq -1$? Justifiez.

(d) Calculez $\sum_{\ell=0}^{4n} \boldsymbol{i}^{\ell}$ où $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Expliquez et justifiez votre démarche.

Question 4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{x^2+\alpha x+1}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez α pour que la tangente au graphe de f en $x = 0$ passe par le point $(1, 1)$. /4

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

Question 5. Donnez, sous la forme d'une union d'intervalles disjoints, le domaine de définition de la fonction $\quad$ /7

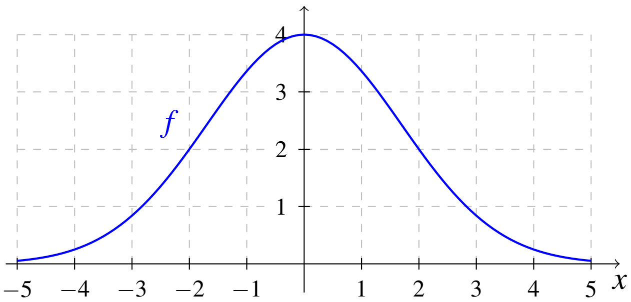
$$f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{x\sqrt{x+2}}\right)$$

INDICATION : Si un polynôme $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ vérifie $p(-1) = 0$, alors $p(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on peut trouver en résolvant un système linéaire.

Mathématique Élémentaire		Nom :
Examen	(29 octobre 2007)	Prénom :
		Section : Agrég math & phys

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 6. Soit $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Écrivez l'ensemble $A = \{x \in [-5,5] : x \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 2\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche. $/3$



Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

/6

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

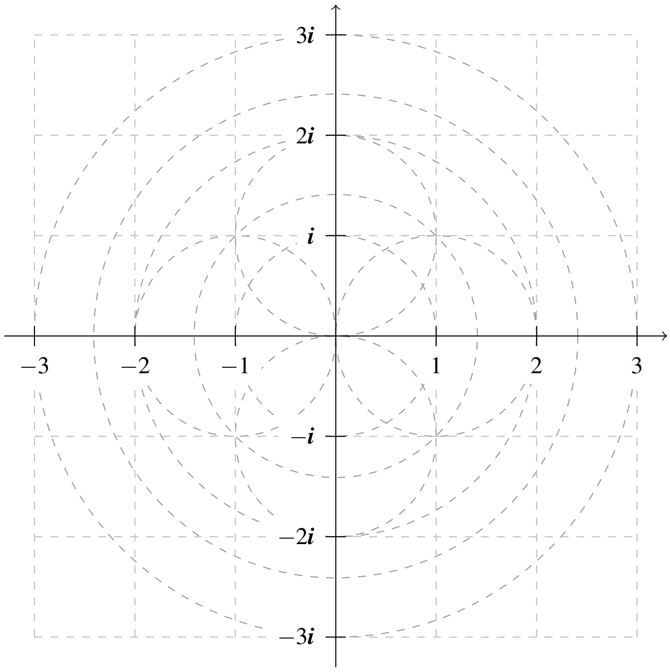
$$f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x \leqslant 2 \\ 7 - \sqrt{9 - x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Écrivez, sous forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est), l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ défini par $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant 4\}$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

Question 8. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = -8$. Représentez les solutions trouvées dans le plan complexe. Expliquez votre démarche.

/5



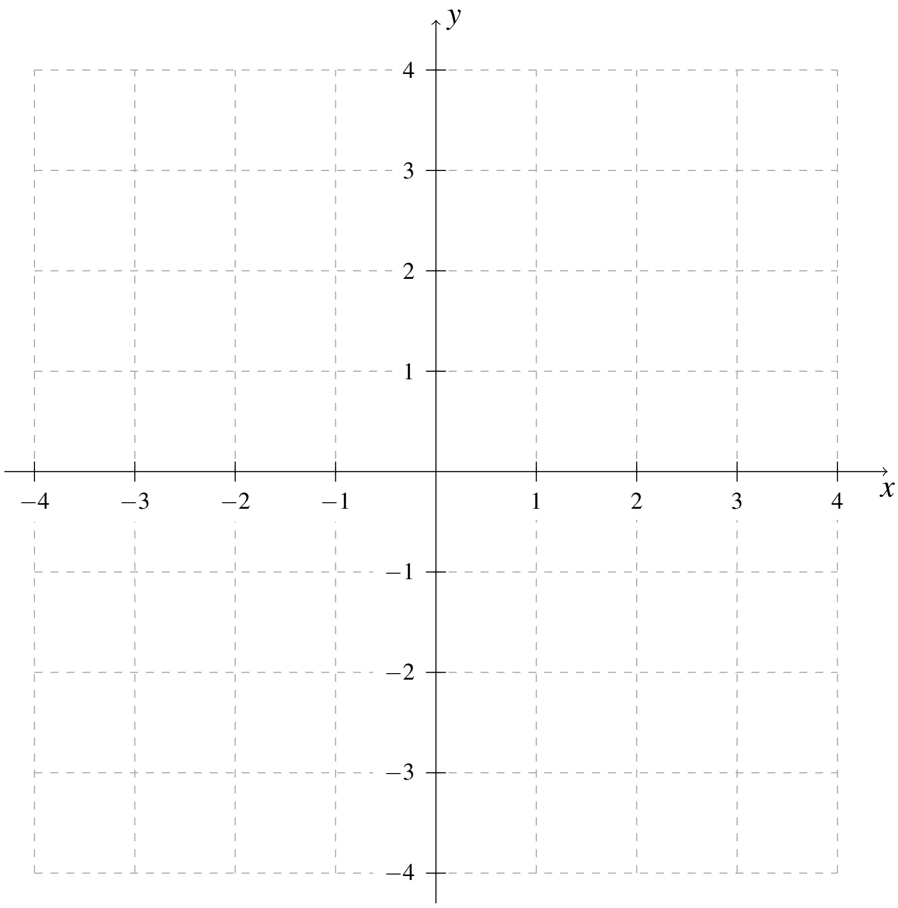
Nom :

Prénom :

Section : Agrég math & phys

Partie spécifique aux étudiants de l'agrégation.

Question 9. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) = (x-1)(y-1)(x^2+y^2-4)$. Sur le graphique ci-dessous, dessinez les régions du plan où $f(x,y) < 0$ et celles où $f(x,y) > 0$. Expliquez et justifiez votre démarche. /6



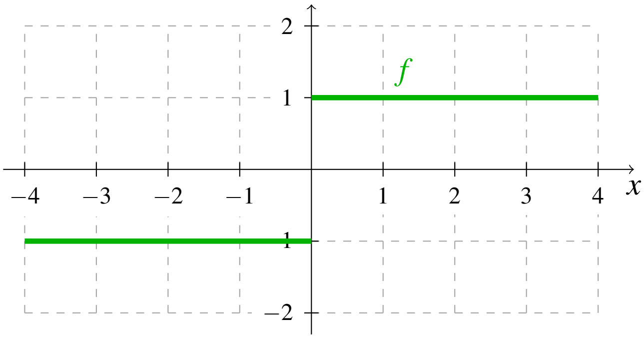
Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

Question 10. $/10$

- Soit $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Définissez en ε-δ la notion « f est continue en a ».

- En utilisant cette définition, prouvez que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est continue en 1. La qualité de votre rédaction est importante.

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys



Question 11. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$ dont le graphe est esquissé ci-contre est-elle continue sur son domaine ? Justifiez votre réponse de manière détaillée.

/5

Question 12. De la même manière que $+$ et $\cdot$ s'étendent des nombres réels aux nombres complexes en conservant leurs propriétés, on voudrait étendre l'opération « racine carrée » aux nombres complexes. Autrement dit, on voudrait définir $\sqrt{z}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, qui coïncide avec la racine carrée habituelle si $z \in \mathbb{R}$ et qui possède la propriété

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \qquad \sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$$

Peut-on le faire ? Si vous répondez par l'affirmative, veuillez donner une définition claire de $\sqrt{z}$. Si vous répondez par la négative, veuillez exhiber un exemple concret qui montre l'impossibilité de définir une telle opération.

Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Question 13. Un élève affirme que, si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie sur tout $\mathbb{R}$) possède un minimum en un point $a \in \mathbb{R}$, alors, sur un petit intervalle centré en a, f est décroissante avant a et f est croissante après a. /10

(a) Traduisez cette affirmation sous la forme d'une formule quantifiée.

(b) Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Comment justifieriez-vous votre réponse à cet élève ?

Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Question 14. Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice

$/5$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(a) Donnez le cofacteur C_{32} associé à l'élément a_{32}.

(b) Donnez l'adjointe de A, notée $\operatorname{adj} A$.

(c) Montrez que, si le déterminant de A est non nul, alors $(\operatorname{adj} A)^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét} A} A$.