Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2007) **Correction**

Question 1. *Calculer*

- $$\sum_{u=-3}^{v} u^2 = \sum_{u=-3}^{0} u^2 + \sum_{u=1}^{v} u^2$$
$$= (-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+\sum_{u=1}^{v} u^2$$
$$= 14 + \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{(v+4)(2v^2-5v+21)}{6}$$

- $$\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=k+1}^{r}(\ell-k) = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{\ell=1}^{r}(\ell-k)-\sum_{\ell=1}^{k}(\ell-k)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}(\ell-k)-\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{k}(\ell-k)$$
$$= 0-\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{k}(\ell-k)$$
(car on somme tous les éléments de la matrice $(\ell-k)_{1\leqslant k,l\leqslant r}$ qui est antisymétrique)
$$= -\sum_{k=1}^{r}\frac{k(k+1)}{2}-k^2$$
$$= -\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{k}{2}-\frac{k^2}{2}\right)$$
$$= \frac{r(r+1)(2r+1)}{12}-\frac{r(r+1)}{4}$$
$$= \frac{r(r+1)}{12}\big((2r+1)-3\big)$$
$$= \frac{r(r+1)(r-1)}{6} = \frac{r^3-r}{6}$$

Question 2. *Calculer* $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j$.

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j 1^{n-j} = (-1+1)^n = 0^n = 0$$

Question 3.

(a) *Prouvez par récurrence que, pour $n \geqslant 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\left(\sum_{\ell=0}^{n} t^{\ell}\right)(1-t) = 1 - t^{n+1}$$

<u>Cas de base $n = 0$</u> : On doit vérifier que $\left(\sum_{\ell=0}^{0} t^{\ell}\right)(1-t) = 1 - t^{0+1}$ c'est-à-dire $(t^0)(1-t) = 1-t$. C'est vérifié car $t^0 = 1$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

<u>L'étape de récurrence</u> requiert de montrer que, sous l'hypothèse de récurrence qui dit que la formule est vérifiée pour $0 \leqslant n \leqslant k$, la formule est vraie pour $n = k+1$. On doit donc prouver que

$$\left(\sum_{\ell=0}^{k+1} t^{\ell}\right)(1-t) = 1 - t^{(k+1)+1}$$

c'est-à-dire que

$$\left(\sum_{\ell=0}^{k} t^{\ell} + t^{k+1}\right)(1-t) = 1 - t^{k+2}$$

ou encore, en distribuant $1-t$,

$$\left(\sum_{\ell=0}^{k} t^{\ell}\right)(1-t) + t^{k+1}(1-t) = 1 - t^{k+2}$$

Le membre de gauche de l'égalité devient, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $1 - t^{k+1} + t^{k+1}(1-t) = 1 - t^{k+2}$ ce qui est le membre de droite.

(b) *Calculer* $\sum_{\ell=0}^{4n} \boldsymbol{i}^{\ell}$ *où* $\boldsymbol{i}^2 = -1$. *Expliquez et justifiez votre démarche.*

Il faut remarquer que bien que (a) ait été prouvé pour $t \in \mathbb{R}$, on n'utilise en rien ce fait et on peut refaire une preuve identique pour $t \in \mathbb{C}$. On peut donc appliquer (a) avec $t = \boldsymbol{i}$ et $4n$ au lieu de n, ce qui donne

$$\left(\sum_{\ell=0}^{4n} \boldsymbol{i}^{\ell}\right)(1-\boldsymbol{i}) = 1 - \boldsymbol{i}^{4n+1}$$

On sait que $\boldsymbol{i}^4 = 1$, donc $\boldsymbol{i}^{4n+1} = (\boldsymbol{i}^4)^n \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$. D'autre part, $\boldsymbol{i} \neq 1$, donc on obtient

$$\sum_{\ell=0}^{4n} \boldsymbol{i}^{\ell} = 1$$

Question 4. *Calculer et exprimer le résultat final sous forme trigonométrique.*

- $\overline{1-\boldsymbol{i}} = 1+\boldsymbol{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4}$
- $(3-3\boldsymbol{i})^{-1} = 3^{-1}(1-\boldsymbol{i})^{-1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1+\boldsymbol{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4}$
- $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{i}}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}-\boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}\cdot\operatorname{cis}\dfrac{8\pi}{6} = \operatorname{cis}\dfrac{9\pi}{6} = \operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{2}$

Question 5. *Donnez la table de vérité de*

$$A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C). \tag{1}$$

À partir de celle-ci, donnez une formule équivalente à (1) qui soit plus simple. Justifiez.

A	B	C	$B\Rightarrow C$	$A\vee(B\Rightarrow C)$	$B\wedge\neg C$	(1)
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0

Clairement en comparant $B\wedge\neg C$ et (1), on voit que ces deux propositions ont la même table de vérité, c'est-à-dire que $B\wedge\neg C$ est équivalente à (1) ou encore que $(1) \Leftrightarrow B\wedge\neg C$ est une tautologie.

Question 6. *Donnez, sous la forme d'une union d'intervalles disjoints, le domaine de définition de la fonction*

$$f : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{x\sqrt{x+2}}\right)$$

INDICATION : *Si un polynôme $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ vérifie $p(-1) = 0$, alors $p(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on peut trouver en résolvant un système linéaire.*

Pour que l'expression qui définit f ait un sens, il faut (et il suffit) que

- $x+2 \geqslant 0$ pour que la racine carrée existe ;
- $x\sqrt{x+2} \neq 0$ pour que la fraction existe ;
- $-1 \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x+2}} \leqslant 1$ pour que la fraction appartienne au domaine de la fonction arcsin.

La première condition dit que $x \geqslant -2$ et la seconde que $x \neq 0$ et $x \neq -2$. Ensemble, elles demandent que $x \in \,]-2,0[\,\cup\,]0,+\infty[$. Reste à tenir compte de la troisème condition. Distinguons deux cas[1] :

[1] On peut éviter de le faire si on réécrit la condition comme $\frac{1}{|x|\sqrt{x+2}} = \left|\frac{1}{x\sqrt{x+2}}\right| \leqslant 1$ et qu'on élève au carré les deux membres, la valeur absolue disparaissant dans cette mise au carré (car $|x|^2 = x^2$).

- Si $x \in]-2,0[$, alors la fraction est négative et l'inégalité $\frac{1}{x\sqrt{x+2}} \leqslant 1$ est vérifiée. Pour l'inégalité de gauche, on multiplie chacun de ses membres par $x\sqrt{x+2} < 0$ ce qui renverse le sens de l'inégalité :
$$-x\sqrt{x+2} \geqslant 1$$
Les deux membres de cette inégalité étant positifs, on obtient une inégalité équivalente en les élevant au carré $x^2(x+2) \geqslant 1$, ce qui s'écrit encore
$$x^3+2x^2-1 \geqslant 0$$
Posons $p(x) := x^3+2x^2-1$. Comme $p(-1)=0$, on sait que $p(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$ pour certains $a,b \in \mathbb{R}$. En développant chacun des deux membres, on a
$$x^3+2x^2-1 = x^3+(a+1)x^2+(b+a)x+b$$
ce qui donne lieu aux équations $a+1=2$, $b+a=0$ et $b=-1$. La solution est $a=1$ et $b=-1$. Donc,
$$x^3+2x^2-1=(x+1)(x^2+x-1)$$
Le polynôme x^2+x-1 possède deux racines qui sont $x_1 := \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme le coefficient de x^2 est >0, ce polynôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif à l'intérieur. Grâce à ces informations, on dresse le tableau de signes suivant :

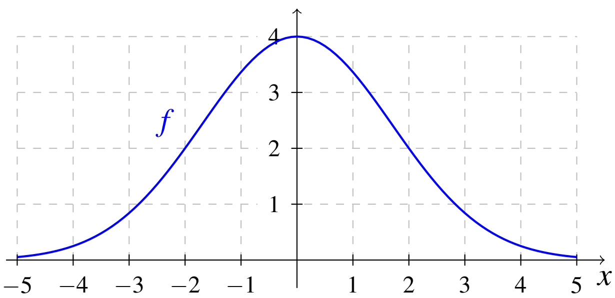
x		-2		x_1		-1		0		x_2	
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+x-1	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^3+2x^2-1	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

En se rappelant qu'on travaille ici avec les $x \in]-2,0[$, l'ensemble des solutions pour ce cas est $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right]$.

- Si $x \in]0,+\infty[$, alors la fraction est positive et l'inégalité $-1 \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x+2}}$ est vérifiée. En multipliant les deux membres de l'autre inégalité par $x\sqrt{x+2} > 0$, on obtient $1 \leqslant x\sqrt{x+2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, on peut les élever au carré en gardant une inégalité équivalente qui est, après simplifications, $x^3+2x^2-1 \geqslant 0$. On obtient la même inéquation que précédemment mais cette fois pour les $x \in]0,+\infty[$. En consultant le tableau de signes ci-dessus, on constate que la solution est $x \in \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

En conclusion, le domaine de définition de f s'écrit :
$$\operatorname{Dom} f = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

Question 7. *Soit $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-contre. Écrivez l'ensemble $A = \{x \in [-5,5] : x \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 2\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche.*



Il s'agit de comprendre pour quels x la proposition « $x \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 2$ » est vraie. De deux choses l'une :

- ou $x > 1$ et alors l'implication est vraie (quelle que soit la valeur de vérité de $f(x) \leqslant 2$). Tous les $x \in]1,5]$ rendent donc la proposition vraie.
- ou $x \leqslant 1$ et alors il faut aussi que $f(x) \leqslant 2$. Du graphe on déduit que $f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-5,-2] \cup [2,5]$. Mais comme on travaille avec les x plus petits ou égaux à 1, il ne reste que $[-5,-2]$.

En conclusion, l'ensemble A des x tels que « $x \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 2$ » est vraie est l'union des solutions de chacun des deux cas, à savoir

$$A = [-5,-2] \cup]1,5]$$

REMARQUE 1 : On peut aussi utiliser le fait que $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg P \vee Q$ et que deux formules équivalentes définissent le même ensemble :

$$\begin{aligned} A &= \big\{x \in [-5,5] : x \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 2\big\} \\ &= \big\{x \in [-5,5] : x > 1 \vee f(x) \leqslant 2\big\} \\ &= \big\{x \in [-5,5] : x > 1\big\} \cup \big\{x \in [-5,5] : f(x) \leqslant 2\big\} \\ &=]1,5] \cup \big([-5,-2] \cup [2,5]\big) \\ &= [-5,-2] \cup]1,5] \end{aligned}$$

REMARQUE 2 : Insistons sur le fait qu'on ne demande *pas* que $x \leqslant 1$ mais seulement que *si* $x \leqslant 1$ alors $f(x) \leqslant 2$. Demander les deux conditions $x \leqslant 1$ et $f(x) \leqslant 2$, c'est parler de l'ensemble $\big\{x \in [-5,5] : x \leqslant 1 \wedge f(x) \leqslant 2\big\}$.

Question 8. *Soit le système*

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ -x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?*

(b) *Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = 2$.*

(c) *En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système pour $\lambda = 2$.*

(d) *Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.*

(a) On a vu qu'un tel système possède une solution unique si et seulement si le déterminant de la matrice des coefficients, notée A dans l'énoncé, est non nul. On a

$$\begin{aligned}\text{dét} A = \text{dét}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} &= \lambda^3 + 1 - 1 - (\lambda - \lambda + \lambda) \qquad \text{(règle de Sarrus)} \\ &= \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1)\end{aligned}$$

Donc dét$A \neq 0$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$.

(b) Si $\lambda = 2$, utilisons la méthode de la matrice compagnon pour calculer l'inverse de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2/(-3) \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 5/6 & -1/2 & 1/6 \\ -1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

(c) On a vu que si $Ax = b$ est un système de n équations linéaires à n inconnues tel que A^{-1} existe, alors la solution du système est donnée par $x = A^{-1}b$. Ici,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/2 & 1/6 \\ -1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(d) Par (a), dét$A = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

- Si $\lambda = 0$, le système s'écrit

$$\begin{cases} y - z = 1 & (2) \\ x - z = 1 & (3) \\ -x + y = 1 & (4) \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) s'écrivent respectivement $y = 1+z$ et $x = 1+z$. En remplaçant dans (4), on trouve $-x+y = -1-z+1+z \neq 1$. Le système est donc impossible. L'ensemble des solutions est donc $\varnothing$.

- Si $\lambda = 1$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (5)\\ x+y-z=1 & (6)\\ -x+y+z=1 & (7)\end{cases}$$

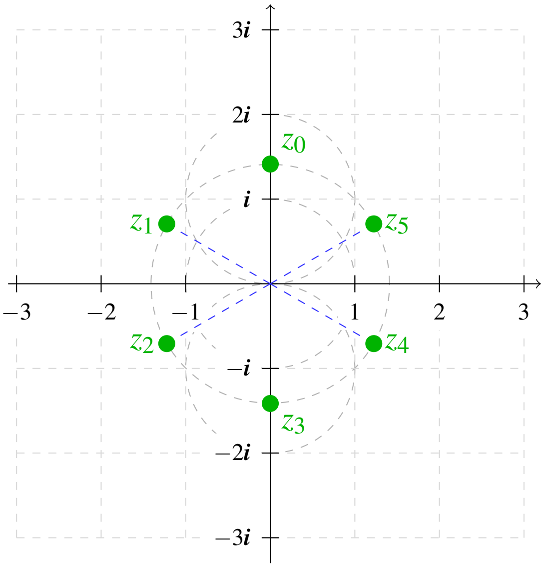
Les équations (5) et (6) sont identiques et si on additionne (6) et (7), on a $y = 1$. En remplaçant dans (6), on a $x = 1-y+z = 1-1+z = z$. Donc l'ensemble S des solutions est $S = \{(\mu,1,\mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$.

- Si $\lambda = -1$, le système s'écrit

$$\begin{cases} -x+y-z=1 & (8)\\ x-y-z=1 & (9)\\ -x+y-z=1 & (10)\end{cases}$$

Les équations (8) et (10) sont identiques. En additionnant (8) et (9), on a $-2z = 2$, c'est-à-dire $z = -1$. En remplaçant dans (9), on a $x = 1+y+z = 1+y-1 = y$. Donc l'ensemble S des solutions s'écrit $S = \{(\mu,\mu,-1) : \mu \in \mathbb{R}\}$.

Question 9. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = -8$. Représentez les solutions trouvées dans le plan complexe. Expliquez votre démarche.*



Comme $-8 = (-1)\cdot 8 = \boldsymbol{i}^6(\sqrt{2})^6 = (\boldsymbol{i}\sqrt{2})^6$, l'équation à résoudre devient $X^6 = (\boldsymbol{i}\sqrt{2})^6$. Clairement $\boldsymbol{i}\sqrt{2} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$ est une solution particulière de l'équation. Par conséquent, les solutions de $X^6 = -8$ s'obtiennent comme le produit de $\boldsymbol{i}\sqrt{2}$ par les racines sixièmes de l'unité (c'est-à-dire les solutions de $X^6 = 1$). Explicitement, cela donne les complexes

$$\Big(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\Big)\operatorname{cis}\Big(k\frac{2\pi}{6}\Big), \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

ou encore

$$z_0 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}, \quad z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}, \quad z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6},$$
$$z_3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{9\pi}{6}, \quad z_4 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{6}, \quad z_5 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}.$$

Question 10. *Pour chacune des relations définies ci-dessous, dites s'il s'agit d'une fonction. Justifiez vos réponses.*

- $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 = x$
- $g : \mathbb{R}^{2\times 2} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} : A \mapsto B$ *tel que* $B^3 = A$

f est une fonction car, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, il existe au plus une — en fait une et une seule[2] — solution y à l'équation $y^3 = x$, à savoir $y = \sqrt[3]{x}$.

g n'est pas une fonction. Nous allons en effet monter qu'à $A = 0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ correspondent plusieurs $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tels que $B^3 = A$. En voici deux (il y en a bien plus mais deux nous suffisent pour contredire la définition de fonction) :

$$B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $B_1^3 = 0$. En ce qui concerne B_2, on calcule aisément que $B_2^2 = 0$ et donc que $B_2^3 = B_2^2 \cdot B_2 = 0 \cdot B_2 = 0$.

Question 11. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Recherchez la ou les matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle(s) que

$$A(X - B) = X(A + B) \tag{11}$$

Notons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. L'équation (10) s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+3 & b-1 \\ c-2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 3(a+3) - 2(c-2) & 3(b-1) - 2d \\ c-2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & -a+b \\ 2d & -c+d \end{pmatrix}$$

[2] L'unicité de la solution vient de la stricte croissance de la fonction $y \mapsto y^3$. L'existence résulte du théorème des valeurs intermédiaires vu dans le cours d'Analyse I. L'unicité permet de donner une notation pour la solution, à savoir $\sqrt[3]{x}$. L'existence dit que $\sqrt[3]{x}$ est défini quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

En se rappelant que l'égalité de deux matrices signifie l'égalité de tous leurs éléments, on obtient, après simplifications, le système d'équations suivant

$$\begin{cases} 3a-2c+13=2b \\ 3b-2d-3=-a+b \\ c-2=2d \\ d=-c+d \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} 3a-2b-2c=-13 \\ a+2b-2d=3 \\ c-2d=2 \\ c=0 \end{cases}$$

La dernière équation disant que $c=0$, l'avant dernière implique que $d=-1$. Avec ces valeurs les deux premières équations deviennent

$$\begin{cases} 3a-2b=-13 \\ a+2b=1 \end{cases}$$

En sommant ces deux équations on a que $4a=-12$ ou encore $a=-3$. De la seconde il vient alors que $b=(1-a)/2=2$. La matrice X recherchée est donc unique et s'écrit :

$$X=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 12. *Soient les matrices $A,B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ définies par*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

où $a,b,c\in\mathbb{R}$. Calculez $\text{dét}A$ et $\text{dét}B$.

$$\begin{aligned} \text{dét}A &= \text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\,\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{(en développant suivant la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\ &= 1\cdot(0-1)=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dét}B &= \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \\ &= \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} && \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\ &= (b-a)(c-a)\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ bc & -c & -b \end{pmatrix} && \text{(mise en évidence d'un facteur commun à tous les éléments d'une colonne)} \\ &= (b-a)(c-a)\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} && \text{(développement suivant la 1}^{\text{re}}\text{ ligne)} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

Question 13. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+\alpha x+1}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez α pour que la tangente au graphe de f en $x = 0$ passe par le point $(1,1)$.*

L'équation de la tangente au graphe à f au point $(0, f(0))$ s'écrit

$$y = f(0) + \partial_x f(0)(x-0).$$

Comme $f(0) = \mathrm{e}^{0^2+\alpha 0+1} = \mathrm{e}$ et $\partial_x f(0) = \partial_x(\mathrm{e}^{x^2+\alpha x+1})\restriction_{x=0} = \mathrm{e}^{x^2+\alpha x+1}\,\partial_x(x^2+\alpha x+1)\restriction_{x=0} = \mathrm{e}^{x^2+\alpha x+1}(2x+\alpha)\restriction_{x=0} = \alpha\,\mathrm{e}$, l'équation de la tangente devient

$$y = \mathrm{e} + \alpha\,\mathrm{e}\,x$$

Cette droite passe par le point $(x,y) = (1,1)$ si et seulement si $1 = \mathrm{e} + \alpha\,\mathrm{e}$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = \mathrm{e}^{-1} - 1$.

Question 14.

(a) *Recherchez l'ensemble A des vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $(1,-1,2)$. Décrivez géométriquement l'ensemble A.*

(b) *Recherchez l'ensemble B des vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont simultanément orthogonaux aux vecteurs $(1,-1,2)$ et $(-2,1,4)$. Décrivez géométriquement l'ensemble B.*

(a) On sait que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Donc,

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : ((x_1,x_2,x_3) \mid (1,-1,2)) = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 - 2x_3\} \\ &= \{(\lambda - 2\mu, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Il s'agit du plan passant par $(0,0,0)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $(1,1,0)$ et $(-2,0,1)$.

REMARQUE : On peut aussi décrire l'ensemble A comme étant le plan passant par $(0,0,0)$ et dont un vecteur normal est $(1,-1,2)$.

(b) Les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ recherchés sont les solutions du système

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & (12) \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 & (13) \end{cases}$$

En additionnant (12) et (13), on a $-\alpha_1 + 6\alpha_3 = 0$, c'est-à-dire $\alpha_1 = 6\alpha_3$. En remplaçant dans (12), on a $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\alpha_3 = 8\alpha_3$. Donc $B = \{(6\lambda, 8\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Il s'agit d'une droite passant par $(0,0,0)$ et dont un vecteur directeur est $(6,8,1)$.

Question 15. *Soit $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x \leqslant 2 \\ 7 - \sqrt{9-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Écrivez, sous forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est), l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ défini par $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant 4\}$.

Il faut résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 4$. Distinguons deux cas :

- Si $x \leqslant 2$, cette inéquation devient $5 - 1/|x| \geqslant 4$. Notons d'emblée que cette écriture requiert comme condition d'existence $x \neq 0$. L'inéquation $5 - 1/|x| \geqslant 4$ se réécrit $1/|x| \leqslant 1$ c'est-à-dire, en multipliant les deux membres par $|x| > 0$, $|x| \geqslant 1$. Les solutions sont les $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. En se rappelant qu'on travaille sous la condition $x \leqslant 2$ et que les condtions d'existence sont $x \neq 0$, on conclut que l'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 4$ dans ce cas est $]-\infty, -1] \cup [1, 2]$.
- Si $x > 2$, alors l'inéquation $f(x) \geqslant 4$ devient $7 - \sqrt{9-x} \geqslant 4$, c'est-à-dire $\sqrt{9-x} \leqslant 3$. La condition d'existence est $9 - x \geqslant 0$ i.e. $x \leqslant 9$. Comme les deux membres de l'inégalité $\sqrt{9-x} \leqslant 3$ sont positifs, on peut les élever au carré sans perdre ni ajouter de solution à l'inéquation : $9 - x \leqslant 9$ i.e. $x \geqslant 0$. Donc, parce qu'on traite les $x > 2$ et au vu des conditions d'existence $x \leqslant 9$, l'ensemble des solutions pour ce cas est $]2, 9]$.

En remettant les solutions des deux cas ensemble, on trouve que $A = \big(]-\infty, -1] \cup [1, 2]\big) \cup]2, 9] =]-\infty, -1] \cup [1, 9]$.

Remarque : Voici un graphe la fonction f à partir duquel on peut facilement retrouver l'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 4$.