Mathématique Élémentaire

Examen (16 janvier 2008)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez les déterminants suivants en détaillant vos calculs et en énonçant les résultats que vous utilisez. /3

(a) $\begin{vmatrix} a & \pi & \pi \\ 0 & b^2 & \pi \\ 0 & 0 & c^3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & b & 1 \\ b & 1 & a \end{vmatrix}$

Question 2. Calculez les sommes suivantes : /3

- $\displaystyle\sum_{k=-3}^{a} \sqrt{5} =$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j =$

Nom :

Prénom :

Section :

/9

Question 3. Soit le système suivant, noté S,

$$\begin{cases} -x+y+\lambda z=1 \\ \lambda x+y-z=1 \\ x+\lambda y-z=1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système S possède-t-il une solution unique ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

(b) Soit la matrice des coefficients du système

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Calculez, si possible, l'inverse de A lorsque $\lambda = -2$. Déduisez-en l'ensemble des solutions du système S pour $\lambda = -2$.

(c) Résolvez le système S lorsque $\lambda = 1$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Si nécessaire, continuez votre réponse sur cette page.

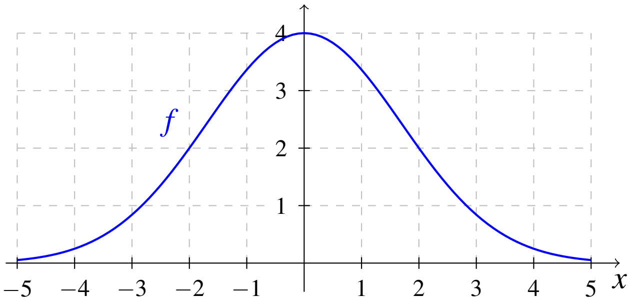
Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(-1,3,8)$ et parallèle à la droite d'intersection des plans d'équations $6x+3y-3z=-2$ et $2x-5y+z=1$. Expliquez votre démarche. /4

Question 5. Soit $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Écrivez l'ensemble $A = \left\{x \in [-5,5] : f(x) \geqslant 2 \Rightarrow x \leqslant 0\right\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche. /3



Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par /4

$$A_{ij} = \begin{cases} 2^i \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(a) Calculez $\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$.

Question 7. Pour chacune des relations définies ci-dessous, dites s'il s'agit d'une fonction. Justifiez vos réponses. /3

- $f : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $\operatorname{tg} y = x$
- $g : \mathbb{R}^{2\times 2} \multimap \mathbb{R}^{2\times 2} : A \mapsto B$ tel que $(A+B)^2 = 0$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8.

/5

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».

(b) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dites sous quelle condition la matrice S est inversible. Donnez alors l'inverse de S et vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Résolvez le système suivant en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = 1 \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = 1 \end{cases}$$

Mathématique Élémentaire

Examen (16 janvier 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Donnez, sous la forme d'une union d'intervalles disjoints, le domaine de définition de la fonction

/7

$$f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{x\sqrt{x+2}}\right)$$

INDICATION : Si un polynôme $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ vérifie $p(-1) = 0$, alors $p(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on peut trouver en résolvant un système linéaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématique Élémentaire

Examen (16 janvier 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 10. Justifiez brièvement vos réponses. /10

(a) Soient les nombres complexes

$$z_1 = 1 + 3\boldsymbol{i}, \qquad z_2 = -1 - \boldsymbol{i}, \qquad z_3 = \sqrt{3}\boldsymbol{i} - 1.$$

Calculez le module du nombre complexe $z = \dfrac{z_1^2 \cdot z_2^4}{z_3}$.

(b) Calculez les arguments des solutions complexes de l'équation $z^3 = -\boldsymbol{i}$.

(c) Calculez le module des solutions complexes de l'équation $z^5 = -32\boldsymbol{i}$ (sans calculer les solutions).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite).

(d) Calculez la forme trigonométrique de $1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}$.

(e) Déterminez le plus petit nombre entier positif non-nul tel que $(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3})^n$ soit réel.

Question 11. Niez la phrase : « S'il fait beau demain, j'irai à la plage ». Justifiez votre réponse. /2

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. On considère la fonction f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

/9

(a) Calculez $f(1)$;

(b) Montrez par récurrence sur n que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$;

(c) Calculez $\partial_x f(x)$;

(d) Déduisez de (b) et (c) que, pour tout $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} ;$$

(e) Calculez, en fonction de n, $S_n := 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1} n$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12 (suite). Si nécessaire, continuez votre réponse sur cette page.