Mathématique Élémentaire

Examen (2 juin 2008)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées, voire pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

/5

- $\displaystyle\sum_{v=-3}^{j} \frac{v(v+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-k}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{t} \sum_{\ell=0}^{t} (k^2 - \ell^2 + 1)$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Donnez, sous la forme d'une union d'intervalles disjoints, le domaine de définition de la fonction /7

$$f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{x\sqrt{2-x}}\right)$$

INDICATION : Si un polynôme $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ vérifie $p(1) = 0$, alors $p(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on peut trouver en résolvant un système linéaire.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Soit la matrice

/7

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles M est inversible ? Si oui, donnez les toutes et calculez l'inverse de M pour ces λ.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3 (suite).

(b) En utilisant le point précédent, résolvez le système

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+6z=5 \\ x+y+5z=10 \end{cases}$$

Question 4. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : t\mapsto \left(\sqrt[17]{t},\ \big((4+\sqrt{6})t-5\big)\,\mathrm{e}^{t^2-(4+\sqrt{6})t}\right)$. Donnez tous les points de l'image de f auxquels la tangente à $\operatorname{Im} f$ est parallèle à l'axe des x. /4

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit le plan α d'équation $-3x+2y+z=7$ et le point p de coordonnées $(-1,0,5)$. /4

(a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point p et perpendiculaire au plan α.

(b) Recherchez le point d'intersection entre la droite D et le plan α.

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

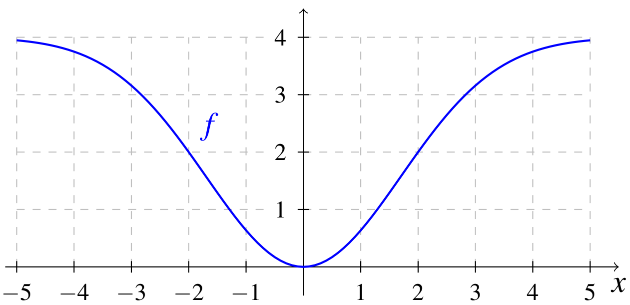
Section :

Question 6. La proposition suivante est-elle une tautologie ? /3

$$\big((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R\big) \Leftrightarrow \big(P \Rightarrow (Q \vee R)\big)$$

Justifiez votre réponse.

Question 7. Soit $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Écrivez l'ensemble $A = \big\{x \in [-5,5] : x \leqslant 3 \Rightarrow f(x) \leqslant 2\big\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche. /3



Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Pour chacune des relations définies ci-dessous, dites s'il s'agit d'une fonction. Justifiez vos réponses. /4

- $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $\operatorname{tg} y = x$
- $g : \mathbb{R}^{2\times 2} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} : A \mapsto B$ tel que $(A+B)^2 = 0$

Question 9. Soit $M = (M_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $M_{ij} = 2i - j$. Considérons la matrice $S = (S_{ij})$ définie par $S = M^t M$. Calculez $\sum_{i=1}^{n} S_{ii}$. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Résolvez le système

/6

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = 0 \end{cases}$$

en fonction du paramètre réel λ.

Nom :

Prénom :

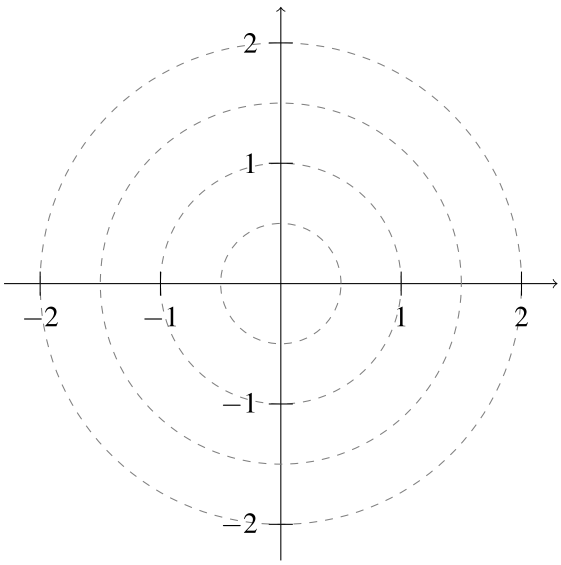
Section :

Question 11. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de chacune des deux équations suivantes : /6

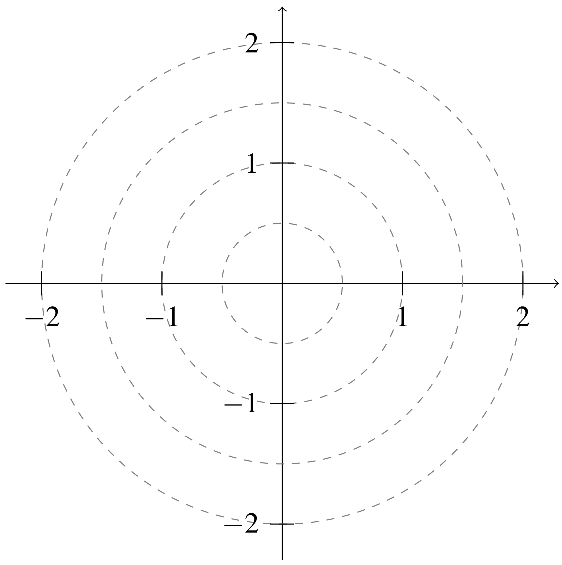
(a) $X^4+1=0$

(b) $X^5+X=0$

Représentez ces solutions sur les graphes ci-dessous.



Solutions de $X^4+1=0$



Solutions de $X^5+X=0$

Mathématique Élémentaire

Examen (2 juin 2008)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Écrivez sous forme trigonométrique $8-(8\sqrt{3})\boldsymbol{i}$. /3

Mettez sous la forme $a+b\boldsymbol{i}$, avec $a,b\in\mathbb{R}$, le nombre complexe $\dfrac{2-3\boldsymbol{i}}{4-3\boldsymbol{i}}$.

Calculez $\left|\dfrac{(2-3\boldsymbol{i})^2}{4-3\boldsymbol{i}}\right|$.

Question 13. Calculez les déterminants suivants : /3

- dét $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- dét $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Mathématique Élémentaire

Examen (2 juin 2008)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 14. $/6$

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}$$

(b) Montrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$