

Mathématique Élémentaire

Examen

(18 août 2008)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées, voire pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

■ $\sum_{v=-3}^j v(v+2)$

■ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{-k}$

■ $\sum_{k=0}^t \sum_{\ell=2}^t (k^2 - \ell^2 + 1)$

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Écrivez sous forme trigonométrique $8 - (8\sqrt{3})i$.

/3

Mettez sous la forme $a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\frac{2 - 4i}{4 - 3i}$.

Calculez $\left| \frac{(2 - 4i)^2}{4 - 3i} \right|$.

Question 3. Calculez les déterminants suivants :

/3

■ $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

■ $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 4. La proposition suivante est-elle une tautologie ?

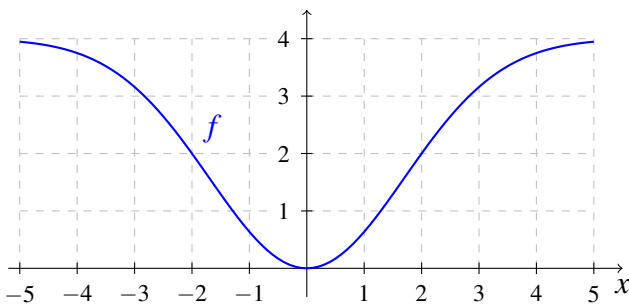
$$(P \Rightarrow (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$$

Justifiez votre réponse.

/3

Question 5. Soit $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Écrivez l'ensemble $A = \{x \in [-5, 5] : f(x) \leq 2 \Rightarrow x \leq 0\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche.

/3



Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/ 4

Question 6. Soit le plan α d'équation $-3x + 2y + z = 7$ et le point p de coordonnées $(-1, 0, 5)$.

- (a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point p et perpendiculaire au plan α .
- (b) Recherchez le point d'intersection entre la droite D et le plan α .

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

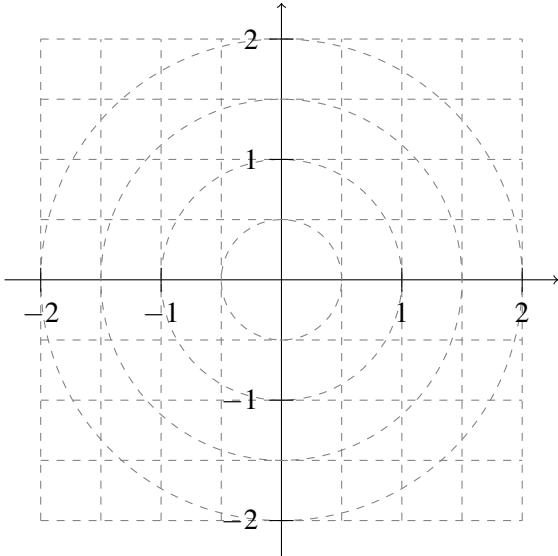
Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Calculez, dans \mathbb{C} , sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de chacune des deux équations suivantes :

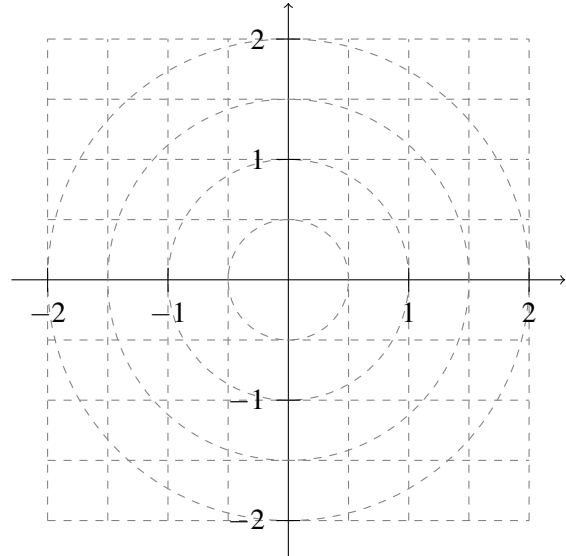
(a) $X^3 + 1 = 0$

(b) $X^5 + X^2 = 0$

Représentez ces solutions sur les graphes ci-dessous.



Solutions de $X^3 + 1 = 0$



Solutions de $X^5 + X^2 = 0$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Soit le système

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \quad (1)$$

où $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$. On suppose que $ab' - a'b \neq 0$.

(a) Montrez que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$$

Expliquez votre démarche.

(b) Montrez que le système (1) possède une et une seule solution qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} & \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} & \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \end{pmatrix}$$

Argumentez clairement et détaillez vos calculs.

/5

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9. Donnez, sous la forme d'une union d'intervalles disjoints, le domaine de définition de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{x\sqrt{2-x}}\right)$$

/7

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\sqrt[17]{t}, ((4 + \sqrt{6})t - 5) e^{t^2 - (4 + \sqrt{6})t} \right)$.
Donnez tous les points de l'image de f auxquels la tangente à $\text{Im } f$ est parallèle à l'axe des x .

/ 4

Nom : _____
Prénom : _____
Section : _____

Question 11. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel. Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles M est inversible ? Si oui, donnez les toutes et calculez l'inverse de M pour ces λ .

/6

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 12.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 - z) \sum_{k=0}^n z^k = 1 - z^{n+1}$$

(b) Montrez que $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = 0$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 13. Soit $M = (M_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $M_{ij} = 2i - j$. Considérons la matrice $S = (S_{ij})$ définie par $S = M^t M$. Calculez $\sum_{i=1}^n S_{ii}$.

/ 4

Question 14. Pour chacune des relations définies ci-dessous, dites s'il s'agit d'une fonction. Justifiez vos réponses.

/ 4

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^{27} = x^2$
- $g : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : A \mapsto B$ tel que $(A + B)^2 = 0$

Question 15. Résolvez le système

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = 0 \end{cases}$$

en fonction du paramètre réel λ .

/6