

Mathématique Élémentaire

Test n° 1

(17 septembre 2007)

| | |
|-----------|-------|
| Nom : | _____ |
| Prénom : | _____ |
| Section : | _____ |

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.

Afin de nous permettre d'avoir une idée de votre parcours antérieur, veuillez nous dire :

- En quelle année vous avez terminé vos études secondaires :
- Si ce n'est pas en juin ou en septembre de cette année, qu'avez vous fait avant d'entrer à l'université ?

De manière à pouvoir orienter au mieux les cours par la suite, veuillez nous dire, pour la dernière année d'enseignement secondaire :

- combien d'heures de mathématique *par semaine* vous avez suivies :
- dans quelle école (nom et ville) :
- avec quel professeur :
- si vous avez vu les nombres complexes : oui / non ;
- si vous avez vu le calcul matriciel : oui / non ;
- si vous aviez un manuel de référence : oui / non ;
si oui lequel/lesquels ?
- combien d'heures *par semaine* (en moyenne) vous travailliez (pour l'ensemble de vos cours) ?
- le résultat final obtenu
 - ▶ pour le cours de mathématique :
 - ▶ globalement :
- si vous avez réussi en juin : oui / non ;
si non, pour quels cours deviez-vous repasser un examen ?
- si vous avez suivi des cours particuliers : oui / non ;
si oui, combien d'heures ?
avec qui ?
- si vous avez participé aux olympiades de mathématique : oui/non ;
si oui, jusqu'où avez-vous été ?

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Il est nécessaire de justifier vos réponses de manière à ce que votre argumentation convainque le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse ! En effet, les questions sont corrigées par différentes personnes.

Question 1. Écrivez les expressions suivantes sous forme d'une fraction :

/2

■ $\frac{a}{b} + \frac{c}{x} =$

■ $\frac{a}{y} \cdot \frac{x}{b} =$

Question 2. Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et soit deux points A, B sur \mathcal{C} de telle sorte que AOB ne soient pas alignés. Justifiez l'affirmation suivante : « le triangle AOB est *isocèle* ».

/2

| |
|-----------------|
| Nom : _____ |
| Prénom : _____ |
| Section : _____ |

Question 3. Trouvez tous les nombres réels x qui satisfont l'équation suivante :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$$

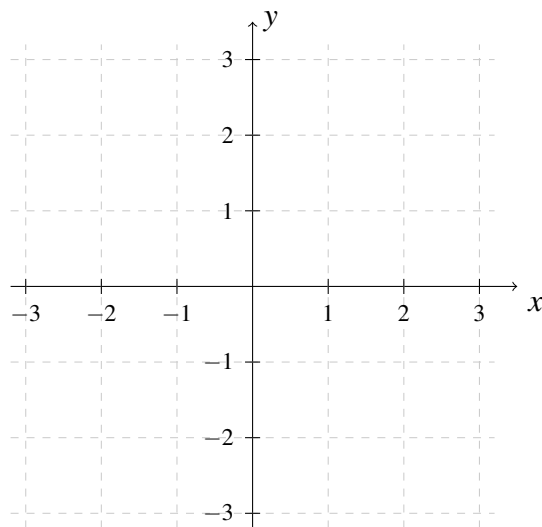
Justifiez toutes les étapes de vos calculs.

/ 3

Question 4. Dans le plan cartésien muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe \mathcal{C} d'équation

$$\mathcal{C} \equiv x + y + 1 = 0.$$

(a) Sur le graphique ci-dessous, tracez cette courbe \mathcal{C} .



(b) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à la courbe \mathcal{C} . Justifiez vos réponses.

- $(0, 0)$
- $(2, -3)$
- $(-725, 721)$
- $(5\pi - 4, 3 - 5\pi)$

(c) Cette courbe a-t-elle des points d'intersection avec l'axe des x ? Si oui, donnez les tous (en expliquant). Si non, donnez un argument qui justifie cette non-intersection.

| | |
|-----------|-------|
| Nom : | _____ |
| Prénom : | _____ |
| Section : | _____ |

Question 5. Considérons la famille de fonctions

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f_a(x) = e^{ax}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f_a est-elle croissante ? Justifiez.

/ 3

Question 6. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *dérivable en un point* $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

En utilisant cette définition, montrez que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. Justifiez en détail.

/ 3

Mathématique Élémentaire

Test n° 1 (17 septembre 2007)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

/ 4

Question 7. Montrez que l'affirmation suivante est vraie :

« Quel que soit le réel x , on peut trouver un réel y tel que $y > x$. »

Détaillez votre raisonnement.

Montrez que l'affirmation suivante est fausse :

« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot y = 1$. »

Détaillez votre raisonnement.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

/7

Question 8. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies (a et b sont des nombres réels) :

$\sqrt{a^2} = a$

$a^2 \leq |a|^2$

si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$

si $a^2 \leq b^2$, alors $a \leq b$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$\frac{|a|}{a} = 1$

$|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a$ et $a \leq b$

$|\sin a| \leq 1$

$1/a \leq 1$

si $a \in]0, 1]$, alors $1/a \leq 1$

Pour chacune des cases non cochées, donnez un contre-exemple.