# Mathématique Élémentaire

## Test n° 2 (24 septembre 2007) **Correction**

---

Question 1. *Calculez*

- $(1+\boldsymbol{i})(3-\boldsymbol{i}) =$
- $\dfrac{1+\boldsymbol{i}}{2-\boldsymbol{i}} =$
- $(2-\boldsymbol{i})^{-1} =$
- $\boldsymbol{i}^{-1} =$

Détaillons notre raisonnement lors des différents calculs qui suivent :

- Puisque la multiplication dans les complexes est distributive et par définition $\boldsymbol{i}^2 = -1$, on obtient $(1+\boldsymbol{i})(3-\boldsymbol{i}) = 4+2\boldsymbol{i}$.
- Rappelons en premier lieu que pour tout nombre complexe $z = a+b\boldsymbol{i}$, nous avons

$$z \cdot \bar{z} = (a+b\boldsymbol{i}) \cdot (a-b\boldsymbol{i}) = a^2+b^2 = |z|^2, \tag{1}$$

  où $\bar{z} = a-b\boldsymbol{i}$ est le complexe conjugué de $z$.

  En appliquant cette identité, nous obtenons les égalités suivantes

$$\frac{1+\boldsymbol{i}}{2-\boldsymbol{i}} = \frac{1+\boldsymbol{i}}{2-\boldsymbol{i}} \cdot \frac{2+\boldsymbol{i}}{2+\boldsymbol{i}} = \frac{1+3\boldsymbol{i}}{5}.$$

- En utilisant la propriété (1), tout complexe non nul $z := a+b\boldsymbol{i}$ (où $a,b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$) a pour inverse $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$. Dès lors, on a $(2-\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{1}{5}(2+\boldsymbol{i})$.
- En réitérant le précédent raisonnement, on obtient $\boldsymbol{i}^{-1} = -\boldsymbol{i}$.

  *Autre justification :* Puisque $\boldsymbol{i}^2 = -1$, l'égalité $\boldsymbol{i} \cdot (-\boldsymbol{i}) = 1$ et la définition de l'inverse d'un complexe donne le résultat.

Question 2. *Calculez la forme trigonométrique de*

- $1+\boldsymbol{i} =$
- $(1+\boldsymbol{i})^2 =$
- $(1+\boldsymbol{i})^3 =$
- $\operatorname{cis}\dfrac{8\pi}{3} =$
- $\operatorname{cis}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) =$

Tout nombre complexe non nul $z = a+b\boldsymbol{i}$, $a,b \in \mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme trigonométrique $z = \rho \operatorname{cis}\theta$ avec $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta \in [0,2\pi[$ et $\operatorname{cis}\theta := \cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta$ ($\theta$ est appelé l'argument de $z$). Le nombre complexe $z = 1+\boldsymbol{i}$ a son $\rho$ qui vaut $\sqrt{2}$. Après mise en évidence du $\rho$, on obtient $z = \sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2})$. Il suffit maintenant de résoudre

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta.$$

Cela devient

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta.$$

On en déduit $\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc $z = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$.
Pour la mise sous forme trigonométrique des deux nombres complexes suivants $(1+\boldsymbol{i})^2$ et $(1+\boldsymbol{i})^3$, nous utilisons la formule de *De Moivre* appliquée à un nombre complexe $z = \rho\operatorname{cis}\theta$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z^n = (\rho\operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n(\operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n\operatorname{cis}(n\theta \bmod 2\pi).$$

En appliquant cette formule à $z = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, on calcule $z^2$ et $z^3$ :

$$\begin{aligned} z^2 &= 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = 2\boldsymbol{i} \quad \text{et,}^1 \\ z^3 &= 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -2+2\boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

L'écriture d'un nombre complexe $\operatorname{cis}\theta$, où $\theta$ est quelconque, sous sa forme usuelle, c'est-à-dire $\operatorname{cis}\theta$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, utilise la périodicité des fonctions cos et sin qui vaut $2\pi$. Plus précisément, on a $\operatorname{cis}(\theta + 2k\pi) = \operatorname{cis}(\theta)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dès lors, $\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3}$ et $\operatorname{cis}\Big(-\frac{5\pi}{3}\Big)$ sont manipulés comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{cis}\frac{8\pi}{3} &= \operatorname{cis}\Big(\frac{8\pi}{3} \bmod 2\pi\Big) = \operatorname{cis}\Big(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\Big) = \operatorname{cis}\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) \qquad \text{et,} \\ \operatorname{cis}\Big(-\frac{5\pi}{3}\Big) &= \operatorname{cis}\Big(-\frac{5\pi}{3} \bmod 2\pi\Big) = \operatorname{cis}\Big(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi\Big) = \operatorname{cis}\Big(\frac{\pi}{3}\Big). \end{aligned}$$

Question 3. *Résoudre l'équation $X^2 + 3X + 4 = 0$ dans $\mathbb{C}$. Expliquez clairement votre démarche.*

Nous utilisons la méthode du discriminant, noté $\Delta$. Pour une équation du second degré de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, le discriminant $\Delta$ est défini comme étant le nombre complexe $b^2 - 4ac$. En premier lieu, on calcule les solutions $z_1, z_2$ dans $\mathbb{C}$ de l'équation intermédiaire $Z^2 = \Delta$. Dès lors, les solutions de notre équation du second degré $aX^2 + bX + c = 0$ seront

$$x_1 = \frac{-b+z_1}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+z_2}{2a}.$$

Dans notre cas, $\Delta = -7$. Les solutions de l'équation $Z^2 = -7$ sont $\boldsymbol{i}\sqrt{7}$ et $-\boldsymbol{i}\sqrt{7}$. En conclusion, les solutions de l'équation $X^2 + 3X + 4$ sont $x_1 = \dfrac{-3+\boldsymbol{i}\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\boldsymbol{i}\sqrt{7}}{2}$.

REMARQUONS que cet exemple illustre le fait que si une racine complexe est solution d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ alors son complexe conjugué l'est aussi (cela mérite une preuve qui utilise les propriétés générales des nombres complexes). Cette assertion se généralise aux équations d'ordre $n$ supérieur à deux ; le lecteur s'y retrouve d'ailleurs confronté à la question suivante dans le cas où $n = 3$.

[1] Nous donnons également la forme algébrique à titre d'information quoique cela ne soit pas requis dans la question.

Question 4. *Prouvez que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation $X^3 + aX + b = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z}$, le complexe conjugué de $z$, est aussi solution de $X^3 + aX + b = 0$.*

En premier lieu, nous rappelons quelques propriétés sur la conjugaison des nombres complexes vues au cours :

(a) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,

(b) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ et en particulier on déduit (par récurrence sur $n$) :

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Dès lors, en appliquant l'opération de conjugaison à l'égalité complexe $z^3 + az + b = 0$, on obtient les égalités suivantes

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{z^3 + az + b} && \text{puisque } \overline{0} = 0 \\ &= \overline{z^3} + \overline{az} + \overline{b} && \text{en utilisant la propriété (a),} \\ &= \bar{z}^3 + \bar{a} \cdot \bar{z} + \bar{b} && \text{en utilisant la propriété (b),} \\ &= \bar{z}^3 + a\bar{z} + b && \text{puisque } a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité traduit que $\bar{z}$ est solution de $X^3 + aX + b = 0$.

Question 5. *Donnez une équation cartésienne de la droite $D$ perpendiculaire à $D' \equiv 2x = y + 2$ et passant par le point $(1, 1)$.*

Une droite $D'$ d'équation cartésienne $y = ax + b$ admet le vecteur $(1, a)$ comme vecteur directeur. Un vecteur directeur de toute droite $D$ perpendiculaire à $D'$ est donc $(1, -\frac{1}{a})$ (en supposant que $a \neq 0$). En effet le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut 0, donc ils sont orthogonaux. D'où l'équation cartésienne de la droite $D$ est de la forme $y = -\frac{1}{a} + b'$ pour un certain $b'$ dans $\mathbb{R}$. Cet élément $b'$ se détermine aisément si un point de cette droite est donné : en effet si $(\alpha, \beta) \in D$ alors[2]

$$D \equiv y = -\frac{1}{a}x + \left(\beta + \frac{\alpha}{a}\right).$$

En appliquant ce raisonnement à notre droite cartésienne

$$D' \equiv y = -2x + 2,$$

on obtient l'équation cartésienne suivante pour la droite $D$

$$D \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

En effet, il suffit de poser $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $a = -2$.

[2] Pouvez-vous faire les détails de calcul ?

Question 6. *On considère les trois vecteurs*

$$u=(1,2), \qquad v=(7,-3), \quad \textit{et} \quad w=(\lambda,\mu-\lambda)$$

*où $\mu$ et $\lambda$ sont des paramètres réels. Déterminez, si possible, $\lambda$ et $\mu$ pour que $u+v+w=0$.*

En premier lieu, puisque deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales ; on traduit l'équation vectorielle $u+v+w=0$ sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} 1+7+\lambda=0 \\ 2+(-3)+(\mu-\lambda)=0. \end{cases}$$

On résout ce système de deux équations du premier ordre à deux inconnues réelles $\lambda$ et $\mu$. La première équation nous donne $\lambda=-8$. En substituant $\lambda$ par sa valeur $-8$ dans la seconde équation, on obtient

$$2+(-3)+(\mu+8)=0,$$

ce qui donne $\mu=-7$. Nous avons donc bien déterminé les valeurs de $\lambda$ et $\mu$ pour lesquelles l'équation vectorielle est vérifiée.

Question 7. *Prouvez que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z|=0$ si et seulement si $z=0$.*

Nous avons rappelé à la Question 1 : pour tout complexe $z=a+b\boldsymbol{i}$, on a

$$z\cdot\overline{z}=|z|^2=a^2+b^2.$$

Par conséquent, on a l'équivalence suivante :

$$z\cdot\overline{z}=0 \iff |z|^2=0 \iff |z|=0.$$

Nous allons prouver les deux implications.

($\Leftarrow$) Supposons $z=0$. Alors $z\cdot\overline{z}=0$ et par la précédente équivalence, on a $|z|=0$.

($\Rightarrow$) Si $|z|=0$ alors par la précédente équivalence $z\cdot\overline{z}=0$, c'est-à-dire $z$ ou $\overline{z}$ est nul. Si $z=0$ alors le résultat est prouvé. Sinon on obtient $\overline{z}=a-b\boldsymbol{i}=0$. On en conclut $a=b=0$, c'est-à-dire $z=0$.

Question 8. *Prouvez que, pour tout $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.*

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes (arbitraires). Comme ce sont des nombres complexes, on peut les écrire sous la forme $z_1=a_1+b_1\boldsymbol{i}$ et $z_2=a_2+b_2\boldsymbol{i}$ avec $a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$. Calculons maintenant chacun des deux membres de l'égalité $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ et constatons leur égalité :

$$\begin{aligned}
\overline{z_1\cdot z_2} &= \overline{(a_1+b_1\boldsymbol{i})\cdot(a_2+b_2\boldsymbol{i})} && \text{(multiplication complexe)}\\
&= \overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\boldsymbol{i}} && \text{(conjugué d'un nombre « } a+b\boldsymbol{i} \text{ »)}\\
&= (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)\boldsymbol{i}\\
\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= \overline{a_1+b_1\boldsymbol{i}}\cdot\overline{a_2+b_2\boldsymbol{i}} && \text{(conjugué d'un nombre « } a+b\boldsymbol{i} \text{ »)}\\
&= (a_1-b_1\boldsymbol{i})\cdot(a_2-b_2\boldsymbol{i}) && \text{(multiplication complexe)}\\
&= (a_1a_2-b_1b_2)+(-a_1b_2-b_1a_2)\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

Question 9. *Pour chacune des paires de droites $D_1$ et $D_2$ ci-dessous, déterminez explicitement l'ensemble $D_1 \cap D_2$.*

- $D_1 \equiv (x,y) = (1,1) + \lambda(1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *et* $D_2 \equiv (x,y) = (-1,2) + \mu(0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ *;*

  On doit chercher l'ensemble des couples $(x,y)$ tels que $(x,y) \in D_1 \cap D_2$, c'est-à-dire tels que $(x,y) \in D_1$ et $(x,y) \in D_2$. Ces $(x,y)$ doivent donc à la fois s'exprimer comme $(1,1) + \lambda(1,2)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ et comme $(-1,2) + \mu(0,1)$ pour un $\mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit, ces points sont ceux pour lesquels on a l'égalité

  $$(1,1) + \lambda(1,2) = (-1,2) + \mu(0,1)$$

  pour certains $\lambda$ et $\mu$. En exprimant cett égalité composante par composante, on trouve le système

  $$\begin{cases} 1 + \lambda = -1 \\ 1 + 2\lambda = 2 + \mu \end{cases}$$

  On en déduit que $\lambda = -2$ (et $\mu = -5$). Par conséquent, le point d'intersection est $(1,1) + (-2)(1,2) = (-1,-3)$ (ou de manière équivalente $(-1,2) + (-5)(0,1) = (-1,-3)$). En conclusion, $D_1 \cap D_2 = \{(-1,-3)\}$.

  REMARQUE : on pouvait bien sûr convertir les équations paramétriques en équations cartésiennes en éliminant les paramètres $\lambda$ et $\mu$ respectivement :

  $$D_1 \equiv y = 2x - 1 \qquad \text{et} \qquad D_2 \equiv x = -1$$

  $D_1 \cap D_2$ est alors l'ensemble des solutions du système

  $$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

  dont la seule solution est $(-1,-3)$. Donc, $D_1 \cap D_2 = \{(-1,-3)\}$.

- $D_1 \equiv x - y = 3$ *et* $D_2 \equiv (x,y) = (1,1) + \lambda(-1,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *;*

  Un couple $(x,y)$ appartenant à $D_1 \cap D_2$ est un couple qui vérifie l'équation $x - y = 3$ et qui peut s'écrire comme $(x,y) = (1,1) + \lambda(-1,0)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette dernière égalité dit que

  $$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \end{cases} \qquad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}.$$

  Le fait que $(x,y)$ vérifie l'équation $x - y = 3$ se traduit par $1 - \lambda - 1 = 3$, c'est-à-dire $\lambda = -3$. Donc l'unique point d'intersection s'écrit $(x,y) = (1,1) + (-3)(-1,0) = (4,1)$. En conclusion, $D_1 \cap D_2 = \{(4,1)\}$.

  REMARQUE : De nouveau, on aurait pu transformer l'équation paramétrique de $D_2$ en une équation cartésienne $D_2 \equiv y = 1$ et résoudre le système des équations cartésiennes de $D_1$ et $D_2$ pour trouver la (même) réponse.

- *$D_1 \equiv 4x-2y=2$ et $D_2 \equiv y=2x+5$.*

  Les vecteurs $(x,y) \in D_1 \cap D_2$ doivent vérifier à la fois les équations cartésiennes de $D_1$ et de $D_2$. Autrement dit, ils sont solution du système

$$\begin{cases} 4x-2y=2 \\ 2x-y=5 \end{cases}$$

  Mais, si $(x,y)$ vérifie la seconde équation, on a aussi, en multipliant les deux membres par 2, que $(x,y)$ doit satisfaire $4x-2y=10$. Si $(x,y)$ vérifie aussi la première équation, on devrait alors avoir $10=2$ ce qui n'est pas vrai. Par conséquent, il n'y a aucun couple $(x,y)$ qui vérifie le système, donc aucun point dans l'intersection des deux droites (celles-ci sont parallèles). En conclusion $D_1 \cap D_2 = \{\} = \varnothing$.

Question 10. *Prouver que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{z^9} = (\overline{z})^9$.*

Nous allons utiliser de manière répétée une propriété de la conjugaison vue au cours (et que vous deviez démontrer à la question 8) : pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. On a

$$\begin{aligned}
\overline{z^9} &= \overline{z \cdot z^8} && (z_1 = z,\ z_2 = z^8) \\
&= \overline{z} \cdot \overline{z^8} = \overline{z} \cdot \overline{z \cdot z^7} && (z_1 = z,\ z_2 = z^7) \\
&= \overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z^7} = \overline{z}^2 \cdot \overline{z \cdot z^6} && (z_1 = z,\ z_2 = z^6) \\
&= \overline{z}^2 \cdot \overline{z} \cdot \overline{z^6} = \overline{z}^3 \cdot \overline{z \cdot z^5} && (z_1 = z,\ z_2 = z^5) \\
&= \overline{z}^3 \cdot \overline{z} \cdot \overline{z^5} = \overline{z}^4 \cdot \overline{z \cdot z^4} && (z_1 = z,\ z_2 = z^4) \\
&= \overline{z}^4 \cdot \overline{z} \cdot \overline{z^4} = \overline{z}^5 \cdot \overline{z \cdot z^3} && (z_1 = z,\ z_2 = z^3) \\
&= \overline{z}^5 \cdot \overline{z} \cdot \overline{z^3} = \overline{z}^6 \cdot \overline{z \cdot z^2} && (z_1 = z,\ z_2 = z^2) \\
&= \overline{z}^6 \cdot \overline{z} \cdot \overline{z^2} = \overline{z}^7 \cdot \overline{z \cdot z} && (z_1 = z,\ z_2 = z) \\
&= \overline{z}^7 \cdot \overline{z} \cdot \overline{z} = \overline{z}^9
\end{aligned}$$

Question 11. *Donnez la* définition *de « y est l'inverse de x ».*

$y$ est l'inverse de $x$ signifie que $yx = 1 = xy$.

REMARQUE : On peut montrer que si deux inverses $y$ et $y'$ de $x$ existent, alors ils sont égaux : $y = y'$ (essayez de faire la preuve !). On peut dès lors parler de *l*'inverse de $x$ et lui le noter $x^{-1}$.

Question 12. *Prouvez que, quels que soient les vecteurs $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, on a $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.*

Comme $u$, $v$ et $w$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, ils s'écrivent sous la forme de couples $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ avec $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$. Rappelons que « $\cdot$ » désigne le *produit scalaire* dans $\mathbb{R}^2$ qui est définit par $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Pour établir l'égalité $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$, développons chacun des deux membres et constatons qu'ils sont égaux.

$$
\begin{aligned}
u \cdot (v + w) &= (u_1, u_2) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2) && \text{(définition de } + \text{ sur } \mathbb{R}^2\text{)} \\
&= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) && \text{(définition du produit scalaire)} \\
&= u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2 && \text{(distributivité dans } \mathbb{R}\text{)} \\
u \cdot v + u \cdot w &= (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \cdot (w_1, w_2) && \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_1 w_1 + u_2 w_2 && \text{(définition du produit scalaire)}
\end{aligned}
$$

On constate que les deux membres sont effectivement égaux (vu que l'addition dans $\mathbb{R}$ est commutative).

REMARQUE : Dans $u \cdot (v + w)$, le « $+$ » désigne l'addition de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tandis que dans $u \cdot v + u \cdot w$, le « $+$ » désigne l'addition de deux nombres réels.