

# Mathématique Élémentaire

Test n° 3

(1<sup>er</sup> octobre 2007)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez la forme trigonométrique de

■  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} =$

■  $\overline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

/2

Question 2. Donnez en extension chacun des ensembles suivants :

■  $\{x \in \mathbb{N} : 2x \leq 23 \text{ et } 3x \text{ est entier}\} =$

■  $\{\sqrt{2}, \pi, i - 1\} \times \{x, y, z\} =$

■  $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x + y \leq 2\} =$

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Soit le plan  $\alpha \equiv 3x + 2y + z = 8$  et la droite  $D$  dont un système d'équations cartésiennes est

$$3 + x = -\frac{1}{4}y + 2 = \frac{z}{\lambda^2}$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , est un paramètre. Pour quelle(s) valeur(s) du réel  $\lambda$  la droite  $D$  est-elle parallèle au plan  $\alpha$ . Expliquez votre démarche.

/ 4

Question 4. Écrivez les deux ensembles suivants sous la forme d'une union d'intervalles dis-joints :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ ou } (x \geq 3 \text{ et } x \leq 5)\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3) \text{ et } x \leq 5\}$$

/ 3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Soient  $D$  et  $D'$  deux droites du plan d'équations respectives

$$D \equiv ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad D' \equiv a'x + b'y + c' = 0.$$

- (a) Sous quelle(s) condition(s) sur  $a, b, c$  (resp.  $a', b', c'$ ) la pente de la droite  $D$  (resp.  $D'$ ) est-elle définie ? Que vaut alors cette pente ?
- (b) Sous les conditions trouvées en (a), prouvez à l'aide de la notion de produit scalaire que les droites  $D$  et  $D'$  sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut  $-1$ .

/ 4

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 6. Complétez les « boîtes » ci-dessous avec les symboles «  $\geq$  », «  $\leq$  », «  $>$  », «  $<$  », « et », « ou », « donc » de manière à ce que l'équivalence soit vraie.

/ 4

$$|x| > c \quad \Leftrightarrow \quad x \boxed{\phantom{>}} - c \boxed{\phantom{>}} x \boxed{\phantom{>}} c$$

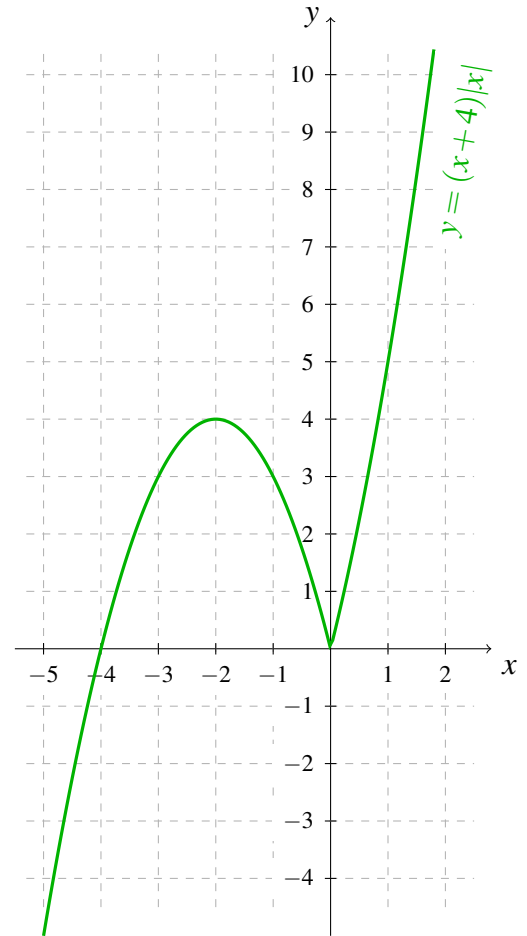
Établissez à l'aide d'un argument graphique l'équivalence que vous venez de compléter. Veuillez expliquer comment le graphique est utilisé pour prouver chacune des deux directions de cette équivalence. Veuillez à la clarté de vos explications (en particulier, n'espérez pas que le correcteur « bouche les trous »).

Question 7. Résolvez algébriquement l'inéquation  $(x + 4)|x| \geq 2$  et utilisez la solution trouvée pour écrire l'ensemble suivant

/6

$$S = \{x \in \mathbb{R} : (x + 4)|x| \geq 2\}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles. Expliquez ensuite comment vous utilisez le graphe ci-dessous pour confirmer la plausibilité de votre réponse.



Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 8. Soit  $x, y \in \mathbb{R}^N$ . Posons  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ .

/7

- (a) Définissez la norme de  $x$ , notée  $\|x\|$ .
- (b) Déterminez  $\|x\|$  si  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c) Montrez que  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ . Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.
- (d) Montrez que  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ . Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 9. En utilisant la formule de De Moivre, calculez la forme trigonométrique des nombres complexes

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

quelle que soit la valeur de  $n \in \mathbb{N}$ .

/ 4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10. Prouvez par récurrence que  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$  quel que soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

/ 3