# Mathématique Élémentaire

## Test n° 3 (1er octobre 2007) Correction

Question 1. *Calculez la forme trigonométrique de*

- $-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$

  En effet $|-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ et donc il s'agit d'un point situé à l'intersection du cercle trigonométrique et de la droite $x=-\frac{1}{2}$.

- $\overline{-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}=\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$

  On a en effet vu que si $z=|z|\operatorname{cis}\theta$ alors $\overline{z}=|z|\operatorname{cis}(2\pi-\theta)$ et $2\pi-2\pi/3=4\pi/3$.

Question 2. *Donnez en extension chacun des ensembles suivants :*

- $\{x\in\mathbb{N} : 2x\leqslant 23 \text{ et } 3x \text{ est entier}\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

  Remarquons que la contrainte « $3x$ est un entier » peut être négligée car elle est automatiquement vérifiée lorsque $x\in\mathbb{N}$.

- $\{\sqrt{2},\pi,\boldsymbol{i}-1\}\times\{x,y,z\}=\{(\sqrt{2},x),\ (\sqrt{2},y),\ (\sqrt{2},z),\ (\pi,x),\ (\pi,y),\ (\pi,z),\ (\boldsymbol{i}-1,x),\ (\boldsymbol{i}-1,y),\ (\boldsymbol{i}-1,z)\}$
- $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : x+y\leqslant 2\}=\{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (1,1),\ (2,0)\}$

Question 3. *Soit le plan $\alpha\equiv 3x+2y+z=8$ et la droite $D$ dont un système d'équations cartésiennes est*

$$3+x=-\frac{1}{4}y+2=\frac{z}{\lambda^2}$$

*où $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, est un paramètre. Pour quelle(s) valeur(s) du réel $\lambda$ la droite $D$ est-elle parallèle au plan $\alpha$. Expliquez votre démarche.*

Un vecteur normal du plan $\alpha$ est $(3,2,1)$. D'autre part, en écrivant le système d'équations de $D$ sous la forme $\frac{3+x}{1}=\frac{y-8}{-4}=\frac{z}{\lambda^2}$, on déduit que $(1,-4,\lambda^2)$ est un vecteur directeur de $D$. Par conséquent, la droite $D$ est parallèle au plan $\alpha$ si et seulement si les vecteurs $(3,2,1)$ et $(1,-4,\lambda^2)$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si leur produit scalaire est nul. Or,

$$\begin{aligned}\big((3,2,1)\mid(1,-4,\lambda^2)\big)=0 \quad&\text{ssi}\quad 3-8+\lambda^2=0\\ &\text{ssi}\quad \lambda^2=5\\ &\text{ssi}\quad \lambda=\sqrt{5}\text{ ou }\lambda=-\sqrt{5}\end{aligned}$$

En conclusion les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles la droite $D$ est parallèle au plan $\alpha$ sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

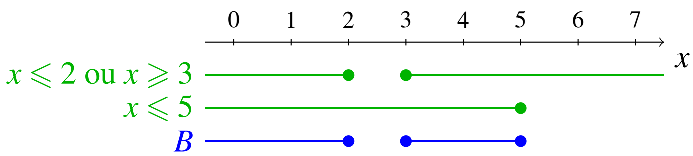
**Question 4.** *Écrivez les deux ensembles suivants sous la forme d'une union d'intervalles disjoints :*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 2 \textit{ ou } (x \geqslant 3 \textit{ et } x \leqslant 5)\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : (x \leqslant 2 \textit{ ou } x \geqslant 3) \textit{ et } x \leqslant 5\}$$

Transformons progressivement la propriété définissant l'ensemble $A$ :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 2 \text{ ou } (x \geqslant 3 \text{ et } x \leqslant 5)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 2 \text{ ou } x \in [3,5]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \in [3,5]\} \\ &= ]-\infty, 2] \cup [3,5] \end{aligned}$$

Pour $B$, représentons graphiquement chacun des deux morceaux liés par le « et » :




Comme on doit satisfaire les deux contraintes « $x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 3$ » et « $x \leqslant 5$ » à la fois, $x$ doit se trouver dans l'intersection des deux ensembles, c'est-à-dire $B = ]-\infty, 2] \cup [3,5]$.

REMARQUE : *En général* « $P$ ou ($Q$ et $R$) » n'est pas équivalent à « ($P$ ou $Q$) et $R$ » et donc, en général, l'ensemble des $x$ qui satisfont chacune de ces deux propriétés ne sont pas égaux.

**Question 5.** *Soient $D$ et $D'$ deux droites du plan d'équations respectives*

$$D \equiv ax + by + c = 0 \quad \textit{et} \quad D' \equiv a'x + b'y + c' = 0.$$

(a) *Sous quelle(s) condition(s) sur $a, b, c$ (resp. $a', b', c'$) la pente de la droite $D$ (resp. $D'$) est-elle définie ? Que vaut alors cette pente ?*

(b) *Sous les conditions trouvées en (a), prouvez à l'aide de la notion de produit scalaire que les droites $D$ et $D'$ sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut $-1$.*

(a) La pente de la droite $D$ (resp. $D'$) est définie ssi $b$ (resp. $b'$) est non nul. En effet, l'équation $ax + by + c = 0$ peut alors s'écrire
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$
et la pente vaut $-a/b$. Idem pour l'équation $a'x + b'y + c' = 0$.

(b) Supposons que $b, b' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Un vecteur normal à $D$ (resp. $D'$) est $(a,b)$ (resp. $(a',b')$). Les droites $D$ et $D'$ sont perpendiculaires ssi

$$\begin{aligned}\text{les vecteurs } (a,b) \text{ et } (a',b') \text{ sont orthogonaux} \quad &\text{ssi} \quad (a,b)\cdot(a',b') = 0\\ &\text{ssi} \quad aa' + bb' = 0 \quad \text{ssi} \quad aa' = -bb'\\ &\text{ssi} \quad \frac{aa'}{bb'} = -1 \quad \text{ssi} \quad \frac{-a}{b}\cdot\frac{-a'}{b'} = -1\end{aligned}$$

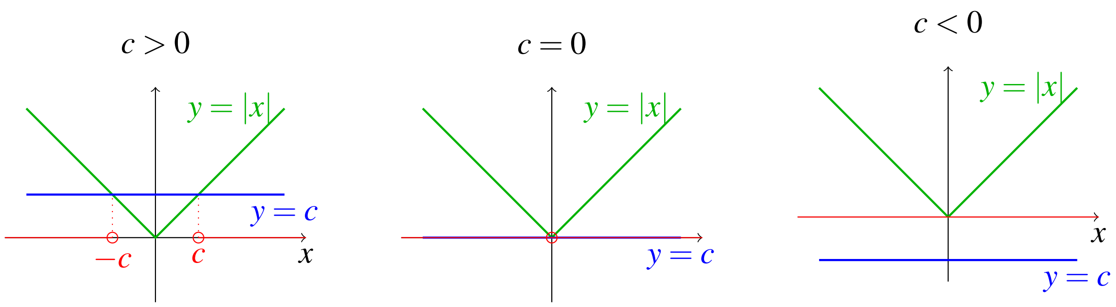
On conclut grâce au point (a).

**Question 6.** *Complétez les « boîtes » ci-dessous avec les symboles « $\geqslant$ », « $\leqslant$ », « $>$ », « $<$ », « et », « ou », « donc » de manière à ce que l'équivalence soit vraie.*

$$|x| > c \quad \Leftrightarrow \quad x \boxed{<} -c \quad \boxed{\textit{ou}} \quad x \boxed{>} c$$

*Établissez à l'aide d'un argument graphique l'*équivalence *que vous venez de compléter. Veuillez expliquer comment le graphique est utilisé pour prouver chacune des deux directions de cette équivalence. Veillez à la clarté de vos explications (en particulier, n'espérez pas que le correcteur « bouche les trous »).*

On distingue trois cas :




Dans le cas $c > 0$, on voit que les $x$ tels que $|x| > c$ — c'est-à-dire les abscisses $x$ telles que le graphe de la valeur absolue est au dessus de celui de la constante $c$ — sont les $x$ plus petits mais différents de $-c$ et les $x$ strictement plus grands que $c$. Autrement dit, ce sont les $x$ qui vérifient la *condition* $x < -c$ ou $x > c$. Les deux abscisses d'intersection du graphe de la courbe $y = |x|$ avec celle $y = c$ se calculent aisément : pour les $x < 0$, on doit résoudre le système $\begin{cases} y = -x \\ y = c \end{cases}$ et, pour les $x \geqslant 0$, le système $\begin{cases} y = x \\ y = c \end{cases}$. La nécessité et la suffisance de la condition « $x < -c$ ou $x > c$ » résultent respectivement des faits suivants : si le graphe de la valeur absolue est strictement au-dessus de celui de $c$, alors $x$ vérifie $x < -c$ ou $x > c$ ; inversement, si $x$ vérifie $x < -c$ ou $x > c$, alors le graphe de la valeur absolue est strictement au-dessus de celui de $c$.

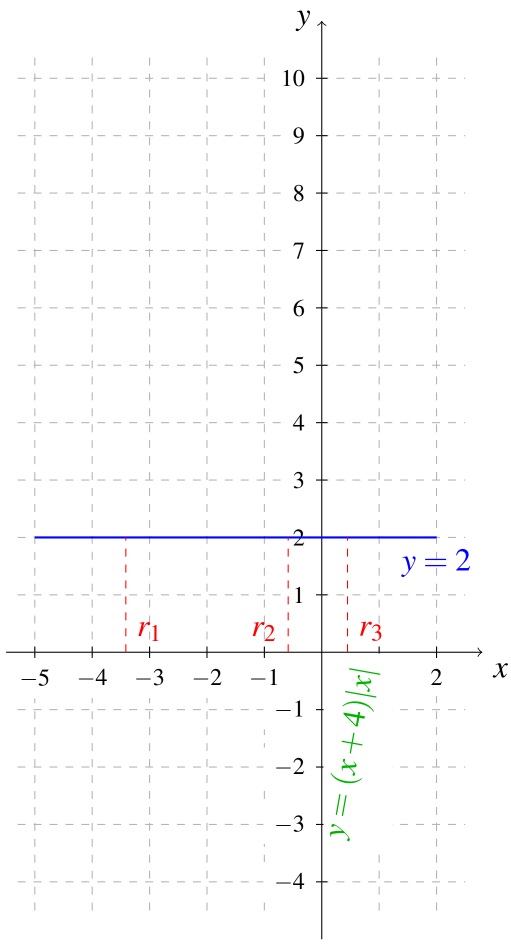
Si $c = 0$ alors, par le même raisonnement, on voit que les solutions de $|x| > 0$ sont tous les $x \neq 0$. Cette dernière condition est équivalente à « $x < 0$ ou $x > 0$ » car un réel est soit strictement négatif, soit strictement positif, soit nul.

Si $c < 0$, tous les $x \in \mathbb{R}$ vérifient $|x| > c$. Or la condition « $x < -c$ ou $x > c$ » est-elle aussi vérifiée par tous les réels $x$ car si $x < 0$ il vérifie $x < 0 < -c$ et, si $x \geqslant 0$ il vérifie $x \geqslant 0 > c$. Les deux propriétés, sélectionnant les mêmes $x$, sont donc équivalentes.

Question 7. *Résolvez algébriquement l'inéquation $(x+4)|x| \geqslant 2$ et utilisez la solution trouvée pour écrire l'ensemble suivant*

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+4)|x| \geqslant 2\right\}$$

*sous la forme d'une union disjointe d'intervalles. Expliquez ensuite comment vous utilisez le graphe ci-dessous pour confirmer la plausibilité de votre réponse.*




Pour la résolution algébrique de $(x+4)|x| \geqslant 2$, nous allons distinguer deux cas afin de pouvoir éliminer la valeur absolue.

- Cas n° 1 : $x \geqslant 0$. Dans ce cas, $|x| = x$ et donc l'inéquation devient $(x+4)x \geqslant 2$ ou encore, après simplifications, $x^2+4x-2 \geqslant 2$. L'équation $x^2+4x-2 = 0$ possède deux solutions : $-2 \pm \sqrt{2}$. Comme le coefficient de $x^2$ est positif, $x^2+4x-2$ a un signe positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur :

| $x$ | | $-2-\sqrt{6}$ | | $2+\sqrt{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+4x-2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

  Par conséquent $x^2+4x-2$ sera positif ou nul si et seulement si $x \leqslant -2-\sqrt{6}$ ou $x \geqslant -2+\sqrt{6}$. Mais il faut se rappeler qu'on travaille ici sous la condition $x \geqslant 0$ et donc que les $x \leqslant -2-\sqrt{6} < 0$ sont à rejeter. En conclusion, les solutions trouvées pour ce cas sont les $x$ vérifiant

$$x \in [2+\sqrt{6}, +\infty[ \tag{1}$$

- Cas n° 2 : $x < 0$. Ici, $|x| = -x$ et l'inéquation devient $(x+4)(-x) \geqslant 2$, c'est-à-dire $x^2+4x+2 \leqslant 0$. L'équation $x^2+4x+2 = 0$ possède deux racines : $-2 \pm \sqrt{2}$ et, comme le coefficient de $x^2$ est positif, le polynôme $x^2+4x+2$ sera négatif entre les deux racines, c'est-à-dire pour les $x$ vérifiant :

$$x \in [-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}] \tag{2}$$

  Remarquons qu'il n'y a ici aucun $x$ à rejeter parce que toutes les valeurs de $[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$ sont déjà strictement négatives.

En remettant les deux cas précédents ensemble, on trouve que les $x$ qui satisfont $(x+4)|x| \geqslant 2$ sont ceux qui vérifient (1) ou (2). Autrement dit

$$S = \{x \in \mathbb{R} : (x+4)|x| \geqslant 2\} = [-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{6}, +\infty[$$

Du graphique, on tire que les abcisses $x$ telles que le graphe de $(x+4)|x|$ est au dessus de celui de la fonction constante 2 sont ceux situés dans un intervalle $[r_1, r_2]$ ainsi que ceux dans un intervalle du type $[r_3, +\infty[$. On a donc bien la même forme de l'ensemble de solution de celle donnée par le résolution algébrique. Cette dernière donne les valeurs exactes de $r_i$. On peut constater que celles-ci sont raisonnables par rapport aux valeurs qu'on peut estimer à partir du graphique :

$$\begin{aligned} r_1 &= -2-\sqrt{2} \approx -3{,}414 \\ r_2 &= -2+\sqrt{2} \approx -0{,}585 \\ r_3 &= -2+\sqrt{6} \approx \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Question 8. *Soit $x, y \in \mathbb{R}^N$. Posons $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.*

(a) *Définissez la norme de x, notée $\|x\|$.*

(b) *Déterminez $\|x\|$ si $x \in \mathbb{R}$.*

(c) *Montrez que $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.*

(d) *Montrez que $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.*

(a) On a : $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$.

(b) Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x_1$. Donc $\|x\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1| = |x|$. Dans $\mathbb{R}$, la norme de $x$ coïncide avec la valeur absolue de $x$.

(c) Correction écrite dans le test 3 du 3 octobre 2005, question 2 b).

(d) On a vu au cours que, quel que soit $u \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\|u\|^2 = (u|u) \tag{3}$$

On a donc, en utilisant cette propriété :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y|x+y) + (x-y|x-y) && \text{(grâce à (3))} \\ &= (x|x+y) + (y|x+y) + (x|x-y) - (y|x-y) && \text{(distrib. de } (\cdot|\cdot) \text{ sur la somme)} \\ &= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) \\ &\qquad + (x|x) - (x|y) - (y|x) + (y|y) \\ &= 2(x|x) + 2(y|y) && \text{(simplifications)} \\ &= 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \end{aligned}$$

Question 9. *En utilisant la formule de De Moivre, calculez la forme trigonométrique des nombres complexes*

$$\left(-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

*quelle que soit la valeur de* $n \in \mathbb{N}$.

On a vu (question 1) que $-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$. Par conséquent, en utilisant la formule de De Moivre, on a que

$$\left(-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \operatorname{cis}\left(n\frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi\right)$$

Donc, dans le cas particulier $n = 3$, on obtient :

$$\left(-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \operatorname{cis}\left(3\frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi\right) = \operatorname{cis}(2\pi \bmod 2\pi) = \operatorname{cis} 0 = 1$$

Par conséquent, si on divise $n$ par 3 (division entière), on peut écrire $n = q \cdot 3 + (n \bmod 3)$, où $q \in \mathbb{N}$, et on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n &= \left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^{3q+n \bmod 3} \\
&= \left(\left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^3\right)^q \left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^{n \bmod 3} \\
&= 1 \cdot \left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^{n \bmod 3} \\
&= \operatorname{cis}\left((n \bmod 3)\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Question 10. *Prouvez par récurrence que* $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ *quel que soit* $z \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

<u>Cas de base $n = 0$.</u> Comme $w^0 = 1$ quel que soit le complexe $w$, on a $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = \overline{z}^0$.
<u>Pas récursif.</u> Supposons que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout $n \leqslant k$ et montrons que l'égalité reste vraie pour $k+1$.

$$\begin{aligned}
\overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k z} && \text{(définition de la puissance } (k+1)^{\text{ième}}) \\
&= \overline{z^k}\,\overline{z} && \text{(règle } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) \\
&= \overline{z}^k \overline{z} && \text{(hypothèse de récurrence pour } n = k) \\
&= \overline{z}^{k+1} && \text{(définition de la puissance } (k+1)^{\text{ième}})
\end{aligned}$$