Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. En utilisant les tables de vérité, montrez que la proposition $(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow P \wedge (Q \vee R)$ est équivalente à $P \vee \neg R$. /3

Question 2. Calculez, si possible : /3

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \pi & -5 & 1 \end{pmatrix} =$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2 (suite).

(b) A^2 si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Question 3. Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(1,1,2)$ et contenant la droite D dont une équation paramétrique est /4

$$(x,y,z) = (4,1,1) + \lambda(3,1,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/6

Question 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 - |x-1| + 3 & \text{si } x < 0 \\ |x-1| + |x+1| & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Écrivez l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant 5\}$ comme une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel λ : /4

$$\begin{cases} x - 4y + 5z = 1 \\ \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Écrivez l'ensemble

/6

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{12}} \right\}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

INDICATION : Si un polynôme $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ vérifie $p(2) = 0$, alors $p(x) = (x-2)(x^2 + ax + b)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on peut trouver en résolvant un système linéaire.

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 7. Soit le système

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Montrez que, quelle que soit la valeur de λ, le système n'est jamais impossible.

(b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

/5

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Donnez la forme trigonométrique des complexes suivants (expliquez votre démarche) : /6

- $z_1 := \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\boldsymbol{i}}{2} =$

- $z_2 := -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\boldsymbol{i}}{2} =$

- $z_3 := \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^{-1} =$

- $z_4 := \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^{3} =$

Pour chacun des complexes précédents z_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, représentez graphiquement z_i et $-\boldsymbol{i} \cdot z_i$ dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.