

Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(8 octobre 2007)

Correction

Question 1. En utilisant les tables de vérité, montrez que la proposition

$$(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow P \wedge (Q \vee R) \quad (1)$$

est équivalente à $P \vee \neg R$.

Dressons la table de vérité des deux propositions :

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	(1)	$P \vee \neg R$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

On constate que la colonne correspondant aux valeurs de vérité de (1) et celle pour $P \vee \neg R$ sont identiques. Autrement dit, les deux propositions se comportent de la même manière en fonction des valeurs de vérité des propositions P , Q et R ; ceci signifie qu'elles sont équivalentes.

Question 2. Calculez, si possible :

$$(a) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} (4 \quad \pi \quad -5 \quad 1) = \begin{pmatrix} -4 & -\pi & 5 & -1 \\ 8 & 2\pi & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 3\pi & -15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) A^2 \text{ si } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \text{cis } \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \text{cis } \frac{4\pi}{3}$. Donc

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{cis } \frac{2\pi}{3} & \text{cis } \frac{4\pi}{3} \\ 1 & \text{cis } \frac{4\pi}{3} & \text{cis } \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{cis } \frac{2\pi}{3} & \text{cis } \frac{4\pi}{3} \\ 1 & \text{cis } \frac{4\pi}{3} & \text{cis } \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 + \text{cis } \frac{2\pi}{3} + \text{cis } \frac{4\pi}{3} & 1 + \text{cis } \frac{4\pi}{3} + \text{cis } \frac{2\pi}{3} \\ 1 + \text{cis } \frac{2\pi}{3} + \text{cis } \frac{4\pi}{3} & 1 + \text{cis } \frac{4\pi}{3} + \text{cis } \frac{8\pi}{3} & 1 + \text{cis } \frac{6\pi}{3} + \text{cis } \frac{6\pi}{3} \\ 1 + \text{cis } \frac{4\pi}{3} + \text{cis } \frac{2\pi}{3} & 1 + \text{cis } \frac{6\pi}{3} + \text{cis } \frac{6\pi}{3} & 1 + \text{cis } \frac{8\pi}{3} + \text{cis } \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité utilise la règle $\text{cis } \theta \cdot \text{cis } \theta' = \text{cis}(\theta + \theta')$ et la dernière résulte des relations :

$$1 + \text{cis} \frac{2\pi}{3} + \text{cis} \frac{4\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$1 + \text{cis} \frac{6\pi}{3} + \text{cis} \frac{6\pi}{3} = 1 + \text{cis} 0 + \text{cis} 0 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$1 + \text{cis} \frac{4\pi}{3} + \text{cis} \frac{8\pi}{3} = 1 + \text{cis} \frac{4\pi}{3} + \text{cis} \frac{2\pi}{3} = 0$$

Question 3. *Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(1, 1, 2)$ et contenant la droite D dont une équation paramétrique est*

$$(x, y, z) = (4, 1, 1) + \lambda(3, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une équation cartésienne du plan α est de la forme $ax + by + cz = d$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un vecteur normal.

Comme $(1, 1, 2) \in \alpha$, on en déduit que

$$a + b + 2c = d. \tag{2}$$

Un vecteur directeur de D est $(3, 1, 1)$ et un point de D est $(4, 1, 1)$. Comme le plan α contient D , on a que

■ $(4, 1, 1) \in \alpha$, d'où la relation

$$4a + b + c = d \tag{3}$$

■ les vecteurs (a, b, c) et $(3, 1, 1)$ sont orthogonaux ; leur produit scalaire vaut donc zéro :

$$3a + b + c = 0 \tag{4}$$

De (4), on a $b + c = -3a$ et de (3), on tire

$$b + c = d - 4a \tag{5}$$

Donc $-3a = d - 4a$, c'est-à-dire $a = d$. En remplaçant dans (2), on trouve $b = -2c$. En remplaçant dans (5), on a $-c = d - 4a$. Donc $-c = d - 4a = a - 4a = -3a$, c'est-à-dire $c = 3a$. On a les relations $d = a$, $c = 3a$ et $b = -2c = -6a$. Prenons $a = 1$. Alors $d = 1$, $c = 3$ et $b = -6$. Donc $\alpha \equiv x - 6y + 3z = 1$.

Question 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 - |x-1| + 3 & \text{si } x < 0 \\ |x-1| + |x+1| & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Écrivez l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 5\}$ comme une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Nous devons résoudre l'inéquation $f(x) \leq 5$. Comme f est définie par morceaux, nous allons devoir faire une discussion par cas.

(a) Si $x < 0$, l'inéquation $f(x) \leq 5$ devient

$$x^2 + (x-1) + 3 \leq 5 \tag{6}$$

où on a utilisé le fait que $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$ et que $x-1 < 0$ (car $x < 0$), d'où $|x-1| = -(x-1)$. Après simplifications, (6) s'écrit comme $x^2 + x - 3 \leq 0$. L'équation $x^2 + x - 3 = 0$ possède une racine négative $(-1 - \sqrt{13})/2$ et une racine positive $(-1 + \sqrt{13})/2$. Le polynôme $x^2 + x - 3$ est négatif entre ses deux racines (puisque le coefficient de x^2 est > 0). Comme on ne s'intéresse qu'aux $x < 0$, ceux qui vérifient l'inéquation dans ce premier cas sont

$$x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, 0 \right[$$

(b) Si $x \geq 0$, l'inéquation $f(x) \leq 5$ devient

$$|x-1| + (x+1) \leq 5$$

car $x+1 \geq 0$ et donc $|x+1| = x+1$. Pour retirer la dernière valeur absolue, nous allons distinguer deux sous-cas selon le signe de $x-1$.

- Si $x \in [0, 1[$, alors l'inéquation s'écrit $-(x-1) + (x+1) \leq 5$, c'est-à-dire $2 \leq 5$. Cette inéquation est satisfaite par n'importe quel x ; les solutions dans ce cas sont donc

$$x \in [0, 1[$$

- Si $x \in [1, +\infty[$, l'inéquation s'écrit $x-1 + x+1 \leq 5$, ou encore $2x \leq 5$. Les solutions sont donc

$$x \in \left[1, \frac{5}{2} \right]$$

(remarquer que $5/2 > 1$).

En remettant les trois cas précédents ensemble, on trouve que l'ensemble S des solutions de $f(x) \leq 5$ vaut

$$S = \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, 0 \right[\cup [0, 1[\cup \left[1, \frac{5}{2} \right] = \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5}{2} \right].$$

Question 5. Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel λ :

$$\begin{cases} x - 4y + 5z = 1 \\ \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Remarquons que la seconde équation du système s'écrit $\lambda(x + y + z) = 0$.

- Si $\lambda \neq 0$, alors on peut simplifier par λ dans l'équation précédente et le système s'écrit

$$\begin{cases} x - 4y + 5z = 1 & (7) \\ x + y + z = 0 & (8) \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on trouve $-5y + 4z = 1$, c'est-à-dire $z = (1 + 5y)/4$. En remplaçant dans (8), on trouve $x = -y - z = (-9y - 1)/4$. Donc l'ensemble, noté S , des solutions du système vaut

$$S = \left\{ \left(-\frac{9\lambda + 1}{4}, \lambda, \frac{1 + 5\lambda}{4} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Géométriquement, on a que les plans d'équations $x - 4y + 5z = 1$ et $x + y + z = 0$ se coupent suivant la droite D passant par $(-1/4, 0, 1/4)$ et dont un vecteur directeur est $(-9/4, 1, 5/4)$. C'est cette droite qui est (décrite par) l'ensemble S .

- Si $\lambda = 0$, alors le système se réduit à l'équation $x - 4y + 5z = 1$, c'est-à-dire $x = 1 + 4y - 5z$. Donc l'ensemble, noté S , des solutions du système vaut

$$S = \left\{ (1 + 4\lambda - 5\mu, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Géométriquement, l'ensemble S est l'ensemble des points appartenant au plan d'équation $x - 4y + 5z = 1$. Ce plan passe par le point $(1, 0, 0)$ et a pour vecteurs directeurs $(4, 1, 0)$ et $(-5, 0, 1)$.

Question 6. Écrivez l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{12}} \right\}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

Il faut résoudre l'inéquation $\frac{1}{x\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{12}}$. Commençons par remarquer que cette équation n'a un sens que si $x \neq 0$ et $x + 1 > 0$, c'est-à-dire si

$$x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

- Si $x \in]-1, 0[$ alors $\frac{1}{x\sqrt{x+1}} < 0 < 1/\sqrt{12}$ et donc l'inéquation est toujours satisfaite.

- Si $x \in]0, +\infty[$, l'inéquation peut se réécrire comme $\sqrt{12} \leq x\sqrt{x+1}$. Les deux membres de l'inéquation sont ≥ 0 et on peut les élever au carré sans changer le sens de l'inégalité : il faut donc résoudre $12 \leq x^3 + x^2$, ou encore

$$x^3 + x^2 - 12 \geq 0 \tag{9}$$

Posons $p(x) = x^3 + x^2 - 12$. Comme $p(2) = 0$, on sait que $p(x) = (x - 2)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 2a)x - 2b$. L'identification des coefficients donne les équations

$$\begin{cases} 1 = a - 2 \\ 0 = b - 2a \\ 12 = 2b \end{cases}$$

On en déduit aisément que $a = 3$ et $b = 6$. Donc $x^3 + x^2 - 12 = (x - 2)(x^2 + 3x + 6)$. Comme l'équation $x^2 + 3x + 6 = 0$ ne possède pas de racine, le polynôme $x^2 + 3x + 6$ est toujours > 0 (car le coefficient de x^2 est > 0). Par conséquent, le tableau de signes pour $x^3 + x^2 - 12$ est

	2	
$x - 2$	-	0 +
$x^2 + 3x + 6$	+	+ +
$x^3 + x^2 - 12$	-	0 +

Par conséquent, les solutions de (9) sont les $x \geq 2$. Comme tous ces x sont dans $]0, +\infty[$, il n'y en a aucun à rejeter.

En conclusion, l'ensemble A des solutions de $\frac{1}{x\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{12}}$ s'écrit

$$A =]-1, 0[\cup [2, +\infty[.$$

Question 7. Soit le système

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Montrez que, quelle que soit la valeur de λ , le système n'est jamais impossible.
- (b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

- (a) Montrons que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) = (0, 0)$ est solution du système. Pour cela, remplaçons dans chaque équation x et y par 0. Pour la première équation, on a bien $(\lambda - 3) \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$ et, pour la seconde équation, on a bien $0 + (\lambda - 3) \cdot 0 = 0 + 0 = 0$.

(b) Calculons le déterminant du système :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$$

Il s'annule en $\lambda = 4$ et en $\lambda = 2$.

- Si $\lambda \neq 4$ et $\lambda \neq 2$, alors le système possède une unique solution donnée par

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}}{(\lambda - 4)(\lambda - 2)} = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{(\lambda - 4)(\lambda - 2)} = 0$$

(ceci était évident sans calcul car on savait que $(0,0)$ était solution du système). Donc l'ensemble des solutions est $\{(0,0)\}$. Géométriquement, on a deux droites qui se coupent en $(0,0)$.

- Si $\lambda = 4$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Le système se réduit à l'équation $x + y = 0$ c'est-à-dire $y = -x$. Donc l'ensemble S des solutions du système vaut $S = \{(\lambda, -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement, on a deux droites confondues dont une équation est $x + y = 0$.

- Si $\lambda = 2$, le système s'écrit

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Le système se réduit à l'équation $x - y = 0$ c'est-à-dire $y = x$. Donc l'ensemble S des solutions du système vaut $S = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement, on a deux droites confondues dont une équation est $x - y = 0$.

Question 8. Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Rappelons les formules trigonométriques qui nous seront utiles :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b) \end{aligned}$$

- Cas de base : montrons la propriété pour $n = 1$. Dans ce cas,

$$A^n = A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Supposons que la propriété est vraie pour $n = i$, c'est-à-dire

$$A^i = \begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \tag{10}$$

et montrons que la propriété est vérifiée pour $n = i + 1$, c'est-à-dire

$$A^{i+1} = \begin{pmatrix} \cos(i+1)\theta & -\sin(i+1)\theta \\ \sin(i+1)\theta & \cos(i+1)\theta \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned} A^{i+1} &= A^i \cdot A && \text{(par les règles des exposants)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} && \text{(par hypothèse de récurrence (10))} \\ &= \begin{pmatrix} \cos i\theta \cdot \cos \theta - \sin i\theta \cdot \sin \theta & \cos i\theta \cdot (-\sin \theta) - \sin i\theta \cdot \cos \theta \\ \sin i\theta \cdot \cos \theta + \cos i\theta \cdot \sin \theta & \sin i\theta \cdot (-\sin \theta) + \cos i\theta \cdot \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(i\theta + \theta) & -\sin(i\theta + \theta) \\ \sin(i\theta + \theta) & \cos(i\theta + \theta) \end{pmatrix} && \text{(voir les formules rappelées)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(i+1)\theta & -\sin(i+1)\theta \\ \sin(i+1)\theta & \cos(i+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc prouvé (10) pour tout $n \geq 1$.

Question 9. *Donnez la forme trigonométrique des complexes suivants (expliquez votre démarche) :*

- $z_1 := \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \text{cis } \frac{\pi}{6}$

En effet, ce complexe est de module 1 et d'ordonnée $1/2$; il s'agit d'un complexe dans le premier quadrant, sur le cercle unité et dont le sinus de l'argument est $1/2$.

- $z_2 := -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = -\text{cis } \frac{\pi}{6} = \text{cis } \frac{7\pi}{6}$

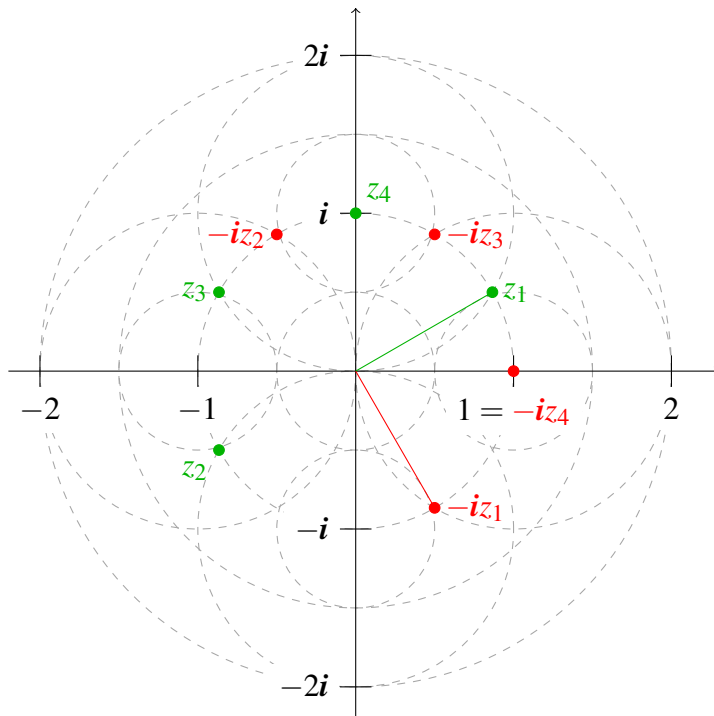
C'est l'opposé du précédent.

- $z_3 := \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{-1} = \text{cis } \frac{5\pi}{6}$

En effet, l'inverse d'un complexe de module 1 est son conjugué et $\overline{z_2} = \overline{\text{cis } \frac{7\pi}{6}} = \text{cis } (2\pi - \frac{7\pi}{6})$.

- $z_4 := \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^3 = z_1^3 = \left(\text{cis } \frac{\pi}{6}\right)^3 = \text{cis } \frac{3\pi}{6} = \text{cis } \frac{\pi}{2}$ (par la formule de De Moivre).

Pour chacun des complexes précédents z_i , $1 \leq i \leq 4$, représentez graphiquement z_i et $-i \cdot z_i$ dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.



Multiplier par $-i$ un complexe z revient à le multiplier par $\text{cis } \frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire à lui appliquer une rotation dans le sens horlogier d'angle $\pi/2$.