Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2007) Correction

Question 1. *En utilisant les tables de vérité, montrez que la proposition*

$$(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow P \wedge (Q \vee R) \tag{1}$$

est équivalente à $P \vee \neg R$.

Dressons la table de vérité des deux propositions :

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	(1)	$P \vee \neg R$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

On constate que la colonne correspondant aux valeurs de vérité de (1) et celle pour $P \vee \neg R$ sont identiques. Aurement dit, les deux propositions se comportent de la même manière en fonction des valeurs de vérité des propositions P, Q et R ; ceci signifie qu'elles sont équivalentes.

Question 2. *Calculez, si possible :*

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \pi & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -\pi & 5 & -1 \\ 8 & 2\pi & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 3\pi & -15 & 3 \end{pmatrix}$

(b) A^2 *si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Remarquons que $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$. Donc

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} & \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} \\ 1 & \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} & \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} \\ 1 & \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} \\ 1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} \\ 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

où l'avant dernière égalité utilise la règle $\operatorname{cis}\theta \cdot \operatorname{cis}\theta' = \operatorname{cis}(\theta+\theta')$ et la dernière résulte des relations :

$$\begin{aligned}
1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} &= 1-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=0\\
1+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} &= 1+\operatorname{cis}0+\operatorname{cis}0=1+1+1=3\\
1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3} &= 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}=0
\end{aligned}$$

Question 3. *Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(1,1,2)$ et contenant la droite D dont une équation paramétrique est*

$$(x,y,z)=(4,1,1)+\lambda(3,1,1), \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Une équation cartésienne du plan α est de la forme $ax+by+cz=d$ où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ est un vecteur normal.
Comme $(1,1,2)\in\alpha$, on en déduit que

$$a+b+2c=d. \tag{2}$$

Un vecteur directeur de D est $(3,1,1)$ et un point de D est $(4,1,1)$. Comme le plan α contient D, on a que

- $(4,1,1)\in\alpha$, d'où la relation
$$4a+b+c=d \tag{3}$$
- les vecteurs (a,b,c) et $(3,1,1)$ sont orthogonaux ; leur produit scalaire vaut donc zéro :
$$3a+b+c=0 \tag{4}$$

De (4), on a $b+c=-3a$ et de (3), on tire

$$b+c=d-4a \tag{5}$$

Donc $-3a=d-4a$, c'est-à-dire $a=d$. En remplaçant dans (2), on trouve $b=-2c$. En remplaçant dans (5), on a $-c=d-4a$. Donc $-c=d-4a=a-4a=-3a$, c'est-à-dire $c=3a$. On a les relations $d=a$, $c=3a$ et $b=-2c=-6a$. Prenons $a=1$. Alors $d=1$, $c=3$ et $b=-6$. Donc $\alpha\equiv x-6y+3z=1$.

Question 4. *On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 - |x-1| + 3 & \text{si } x < 0 \\ |x-1| + |x+1| & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Écrivez l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant 5\}$ comme une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Nous devons résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 5$. Comme f est définie par morceaux, nous allons devoir faire une discussion par cas.

(a) Si $x < 0$, l'inéquation $f(x) \leqslant 5$ devient

$$x^2 + (x-1) + 3 \leqslant 5 \tag{6}$$

où on a utilisé le fait que $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$ et que $x - 1 < 0$ (car $x < 0$), d'où $|x-1| = -(x-1)$. Après simplifications, (6) s'écrit comme $x^2 + x - 3 \leqslant 0$. L'équation $x^2 + x - 3 = 0$ possède une racine négative $(-1-\sqrt{13})/2$ et une racine positive $(-1+\sqrt{13})/2$. Le polynôme x^2+x-3 est négatif entre ses deux racines (puisque le coefficient de x^2 est > 0). Comme on ne s'intéresse qu'aux $x < 0$, ceux qui vérifient l'inéquation dans ce premier cas sont

$$x \in \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, 0\right[$$

(b) Si $x \geqslant 0$, l'inéquation $f(x) \leqslant 5$ devient

$$|x-1| + (x+1) \leqslant 5$$

car $x+1 \geqslant 0$ et donc $|x+1| = x+1$. Pour retirer la dernière valeur absolue, nous allons distinguer deux sous-cas selon le signe de $x-1$.

- Si $x \in [0,1[$, alors l'inéquation s'écrit $-(x-1)+(x+1) \leqslant 5$, c'est-à-dire $2 \leqslant 5$. Cette ineqation est satisfaite par n'importe quel x ; les solutions dans ce cas sont donc

$$x \in [0,1[$$

- Si $x \in [1,+\infty[$, l'inéquation s'écrit $x-1+x+1 \leqslant 5$, ou encore $2x \leqslant 5$. Les solutions sont donc

$$x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$$

(remarquer que $5/2 > 1$).

En remettant les trois cas précédents ensemble, on trouve que l'ensemble S des solutions de $f(x) \leqslant 5$ vaut

$$S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, 0\right[\cup [0,1[\cup \left[1, \frac{5}{2}\right] = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

Question 5. *Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel λ :*

$$\begin{cases} x-4y+5z=1 \\ \lambda x+\lambda y+\lambda z=0 \end{cases}$$

Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Remarquons que la seconde équation du système s'écrit $\lambda(x+y+z)=0$.

- Si $\lambda \neq 0$, alors on peut simplifier par λ dans l'équation précédente et le système s'écrit

$$\begin{cases} x-4y+5z=1 & (7) \\ x+y+z=0 & (8) \end{cases}$$

  En soustrayant les deux équations, on trouve $-5y+4z=1$, c'est-à-dire $z=(1+5y)/4$. En remplaçant dans (8), on trouve $x=-y-z=(-9y-1)/4$. Donc l'ensemble, noté S, des solutions du système vaut

$$S=\left\{\left(-\frac{9\lambda+1}{4},\lambda,\frac{1+5\lambda}{4}\right):\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

  Géométriquement, on a que les plans d'équations $x-4y+5z=1$ et $x+y+z=0$ se coupent suivant la droite D passant par $(-1/4,0,1/4)$ et dont un vecteur directeur est $\big(-9/4,1,5/4\big)$. C'est cette droite qui est (décrite par) l'ensemble S.

- Si $\lambda=0$, alors le système se réduit à l'équation $x-4y+5z=1$, c'est-à-dire $x=1+4y-5z$. Donc l'ensemble, noté S, des solutions du système vaut

$$S=\big\{\big(1+4\lambda-5\mu,\lambda,\mu\big):\lambda,\mu\in\mathbb{R}\big\}$$

  Géométriquement, l'ensemble S est l'ensemble des points appartenant au plan d'équation $x-4y+5z=1$. Ce plan passe par le point $(1,0,0)$ et a pour vecteurs directeurs $(4,1,0)$ et $(-5,0,1)$.

Question 6. *Écrivez l'ensemble*

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{12}}\right\}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

Il faut résoudre l'inéquation $\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{12}}$. Commençons par remarquer que cette équation n'a un sens que si $x\neq 0$ et $x+1>0$, c'est-à-dire si

$$x\in\,]-1,0[\cup]0,+\infty[$$

- Si $x\in\,]-1,0[$ alors $\frac{1}{x\sqrt{x+1}}<0<1/\sqrt{12}$ et donc l'inéquation est toujours satisfaite.

- Si $x \in]0,+\infty[$, l'inéquation peut se réécrire comme $\sqrt{12} \leqslant x\sqrt{x+1}$. Les deux membres de l'inéquation sont $\geqslant 0$ et on peut les élever au carré sans changer le sens de l'inégalité : il faut donc résoudre $12 \leqslant x^3+x^2$, ou encore

$$x^3+x^2-12 \geqslant 0 \tag{9}$$

Posons $p(x) = x^3+x^2-12$. Comme $p(2)=0$, on sait que $p(x) = (x-2)(x^2+ax+b) = x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$. L'identification des coefficients donne les équations

$$\begin{cases} 1 = a-2 \\ 0 = b-2a \\ 12 = 2b \end{cases}$$

On en déduit aisément que $a=3$ et $b=6$. Donc $x^3+x^2-12 = (x-2)(x^2+3x+6)$. Comme l'équation $x^2+3x+6=0$ ne possède pas de racine, le polynôme x^2+3x+6 est toujours >0 (car le coefficient de x^2 est >0). Par conséquent, le tableau de signes pour x^3+x^2-12 est

		2	
$x-2$	$-$	0	$+$
x^2+3x+6	$+$	$+$	$+$
x^3+x^2-12	$-$	0	$+$

Par conséquent, le solutions de (9) sont les $x \geqslant 2$. Comme tous ces x sont dans $]0,+\infty[$, il n'y en a aucun à rejeter.

En conclusion, l'ensemble A des solutions de $\frac{1}{x\sqrt{x+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{12}}$ s'écrit

$$A =]-1,0[\cup [2,+\infty[.$$

Question 7. *Soit le système*

$$\begin{cases} (\lambda-3)x+y=0 \\ x+(\lambda-3)y=0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Montrez que, quelle que soit la valeur de λ, le système n'est jamais impossible.*

(b) *Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

(a) Montrons que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y)=(0,0)$ est solution du système. Pour cela, remplaçons dans chaque équation x et y par 0. Pour la première équation, on a bien $(\lambda-3)\cdot 0+0 = 0+0 = 0$ et, pour le seconde équation, on a bien $0+(\lambda-3)\cdot 0 = 0+0 = 0$.

(b) Calculons le déterminant du système :

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-3 & 1\\ 1 & \lambda-3\end{pmatrix} = (\lambda-3)^2-1 = \lambda^2-6\lambda+8 = (\lambda-4)(\lambda-2)$$

Il s'annule en $\lambda = 4$ et en $\lambda = 2$.

- Si $\lambda \neq 4$ et $\lambda \neq 2$, alors le système possède une unique solution donnée par

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & \lambda-3\end{pmatrix}}{(\lambda-4)(\lambda-2)} = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix}\lambda-3 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{(\lambda-4)(\lambda-2)} = 0$$

  (ceci était évident sans calcul car on savait que $(0,0)$ était solution du système). Donc l'ensemble des solutions est $\{(0,0)\}$. Géométriquement, on a deux droites qui se coupent en $(0,0)$.
- Si $\lambda = 4$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x+y=0\\ x+y=0\end{cases}$$

  Le système se réduit à l'équation $x+y=0$ c'est-à-dire $y=-x$. Donc l'ensemble S des solutions du système vaut $S = \{(\lambda,-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement, on a deux droites confondues dont une équation est $x+y=0$.
- Si $\lambda = 2$, le système s'écrit

$$\begin{cases} -x+y=0\\ x-y=0\end{cases}$$

  Le système se réduit à l'équation $x-y=0$ c'est-à-dire $y=x$. Donc l'ensemble S des solutions du système vaut $S = \{(\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement, on a deux droites confondues dont une équation est $x-y=0$.

Question 8. *Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}.$$

Rappelons les formules trigonométriques qui nous seront utiles :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\sin(b)$$

- Cas de base : montrons la propriété pour $n = 1$. Dans ce cas,

$$A^n = A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Supposons que la propriété est vraie pour $n = i$, c'est-à-dire

$$A^i = \begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \tag{10}$$

et montrons que la propriété est vérifiée pour $n = i+1$, c'est-à-dire

$$A^{i+1} = \begin{pmatrix} \cos(i+1)\theta & -\sin(i+1)\theta \\ \sin(i+1)\theta & \cos(i+1)\theta \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned}
A^{i+1} &= A^i \cdot A && \text{(par les règles des exposants)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} && \text{(par hypothèse de récurrence (10))} \\
&= \begin{pmatrix} \cos i\theta \cdot \cos\theta - \sin i\theta \cdot \sin\theta & \cos i\theta \cdot (-\sin i\theta) - \sin i\theta \cdot \cos\theta \\ \sin i\theta \cdot \cos\theta + \cos i\theta \cdot \sin\theta & \sin i\theta \cdot (-\sin\theta) + \cos i\theta \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(i\theta+\theta) & -\sin(i\theta+\theta) \\ \sin(i\theta+\theta) & \cos(i\theta+\theta) \end{pmatrix} && \text{(voir les formules rappelées)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(i+1)\theta & -\sin(i+1)\theta \\ \sin(i+1)\theta & \cos(i+1)\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé (10) pour tout $n \geqslant 1$.

Question 9. *Donnez la forme trigonométrique des complexes suivants (expliquez votre démarche) :*

- $z_1 := \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\boldsymbol{i}}{2} = \operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}$

  En effet, ce complexe est de module 1 et d'ordonnée $1/2$; il s'agit d'un complexe dans le premier quadrant, sur le cercle unité et dont le sinus de l'argument est $1/2$.

- $z_2 := -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\boldsymbol{i}}{2} = -\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{6}$

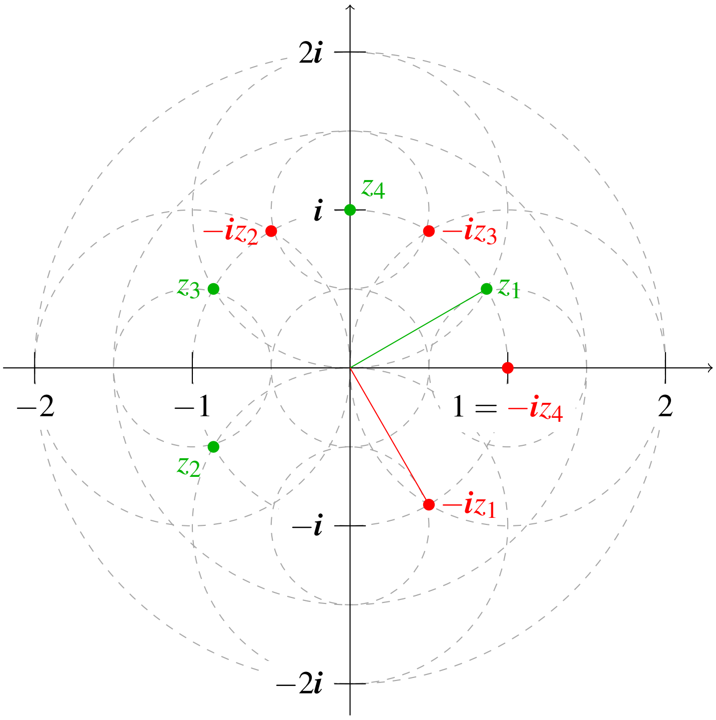
  C'est l'opposé du précédent.

- $z_3 := \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^{-1} = \operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{6}$

  En effet, l'inverse d'un complexe de module 1 est son conjugué et $\overline{z_2} = \overline{\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}} = \operatorname{cis}\big(2\pi - \frac{7\pi}{6}\big)$.

- $z_4 := \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^3 = z_1^3 = \left(\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}\right)^3 = \operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{6} = \operatorname{cis}\dfrac{\pi}{2}$ (par la formule de De Moivre).

Pour chacun des complexes précédents z_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, représentez graphiquement z_i et $-\boldsymbol{i} \cdot z_i$ dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.



Multiplier par $-\boldsymbol{i}$ un complexe z revient à le multiplier par $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire à lui appliquer une rotation dans le sens horlogique d'angle $\pi/2$.