

Mathématique Élémentaire

Test n° 5

(15 octobre 2007)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez, si possible, $(BA^t - 2C)^t$. (Pour rappel, si X est une matrice, X^t désigne la transposée de X .)

/2

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Calculez, si possible

■ $(2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \ 1) =$

/ 2

Question 3. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Montrez par récurrence que, pour $n \geq 1$, on a

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$$

(Pour rappel, si $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, A^t désigne la transposée de A .)

/ 4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

/ 4

- (a) Résolvez ce système dans le plan \mathbb{R}^2 . Interprétez géométriquement les résultats obtenus.
- (b) Résolvez ce système dans l'espace \mathbb{R}^3 . Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (15 octobre 2007)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Donnez le domaine de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\sqrt{x+9} - \frac{3}{x+1}}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

/5

(a) Définissez « A est une matrice antisymétrique ».

(b) Montrez que si A est une matrice antisymétrique, alors, quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $A_{ii} = 0$.

(c) Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par

$$A_{ij} = 2^{i+j}(\pi i - \pi j)^3$$

Montrez que A est une matrice antisymétrique.

Question 7. Calculer

/4

▪ $\sum_{i=-2}^n j =$

▪ $\sum_{j=1}^n j^2 + j - 1 =$

▪ $\sum_{j=0}^{n-1} 2j + 1 =$

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (15 octobre 2007)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Résoudre dans \mathbb{C}

(a) l'équation $X^2 - 4(1 - i) = 0$

(b) l'équation $X^2 - 2X + i = 0$

/ 4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Les définitions suivantes sont-elles des fonctions ?

/ 3

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 = x$.

(b) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto y$ tel que $y^3 = x$.

En cas de réponse positive, donnez le domaine et l'image de la fonction. Veillez à justifier précisément vos réponses.

Question 10. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et θ l'argument de z . Prouver que les solutions de l'équation $X^n = z$ sont $|z|^{1/n} \operatorname{cis}\left(\frac{k2\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

/ 4