Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 5 (15 octobre 2007)

Correction

Question 1. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez, si possible, $(BA^t - 2C)^t$. (Pour rappel, si X est une matrice, X^t désigne la transposée de X.)

On a : $A^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$BA^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$-2C = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ -6 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$BA^t - 2C = \begin{pmatrix} -12 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ -6 & -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -14 & -1 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$(BA^t - 2C)^t = \begin{pmatrix} -14 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Question 2. *Calculez, si possible*

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = 4$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Question 3. *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. *Montrez par récurrence que, pour* $n \geqslant 1$, *on a*

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$$

(Pour rappel, si $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, A^t *désigne la transposée de* A*.)*

- Cas de base $n = 1$. Le premier membre de l'égalité à prouver se réduit à $(A_1)^t$ et le second membre à A_1^t. On a donc bien égalité.
- Supposons que la propriété soit vérifiée quel que soit $n \leqslant \ell$, avec $\ell \geqslant 1$; montrons qu'elle est encore vérifiée pour $n = \ell + 1$, c'est-à-dire que

  $$(A_1 A_2 \cdots A_{\ell+1})^t = A_{\ell+1}^t \cdots A_2^t A_1^t$$

  On a :

  $$\begin{aligned}(A_1 A_2 \cdots A_{\ell+1})^t &= (A_1 A_2 \cdots A_\ell A_{\ell+1})^t \\ &= A_{\ell+1}^t (A_1 A_2 \cdots A_\ell)^t \quad \text{(propriété vue au cours : } \forall A, B \in \mathbb{R}^{p\times p},\ (AB)^t = B^t A^t\text{)} \\ &= A_{\ell+1}^t A_\ell^t \cdots A_2^t A_1^t \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que pour $n \geqslant 1$, $(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$.

Question 4. *Soit le système*

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

(a) *Résolvez ce système dans le plan* $\mathbb{R}^2$. *Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

La première équation s'écrit

$$y = 3 - 2x. \tag{1}$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on a $3x - 6 + 4x = 5$, c'est-à-dire $x = 11/7$. En remplaçant dans (1), on trouve $y = 21/7 - 22/7 = -1/7$. Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left(\frac{11}{7}, -\frac{1}{7} \right) \right\}$$

Géométriquement, chaque équation du système est une équation cartésienne d'une doite de $\mathbb{R}^2$. On a donc deux droites qui se coupent au point $\left(\frac{11}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.

(b) *Résolvez ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les équations du système sont les équations cartésiennes de deux plans. Le système s'écrit

$$\begin{cases} 2x+y+0z=3 \\ 3x-2y+0z=5 \end{cases}$$

Les triplets (x,y,z) qui vérifient simultanément les deux équations sont donc tels que $x = 11/7$, $y=-1/7$ et $z\in\mathbb{R}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(\frac{11}{7},-\frac{1}{7},\lambda\right) : \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Géométriquement, on a deux plans qui se coupent suivant la droite D dont une équation paramétrique est

$$(x,y,z)=\left(\frac{11}{7},-\frac{1}{7},0\right)+\lambda(0,0,1), \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Cette droite passe par $\left(\frac{11}{7},-\frac{1}{7},0\right)$ et admet $(0,0,1)$ comme vecteur directeur.

Question 5. *Donnez le domaine de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\sqrt{\sqrt{x+9}-\dfrac{3}{x+1}}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints.*

Pour que l'expression qui définit la fonction existe, trois conditions sur x sont nécessaires :

- $x+9\geqslant 0$ pour que $\sqrt{x+9}$ existe ;
- $x+1\neq 0$ pour que la fraction $3/(x+1)$ ait un sens ;
- $\sqrt{x+9}-\dfrac{3}{x+1}\geqslant 0$ pour que la racine extérieure puisse être prise.

Les deux premières conditions exigent que $x\in[-9,-1[\cup]-1,+\infty[$. La dernière se réécrit :

$$\frac{3}{x+1}\leqslant\sqrt{x+9} \tag{2}$$

Distinguons deux cas :

- si $x<-1$ i.e. si $x\in[-9,-1[$, alors (2) est vérifiée car $\frac{3}{x+1}<0\leqslant\sqrt{x+9}$.
- si $x>-1$ i.e. si $x\in]-1,+\infty[$, alors on peut élever au carré sans perdre ou ajouter de solution à l'inéquation. Après multiplication des deux membres de l'inégalité par $(x+1)^2$ — qui est positif, donc ne change pas le sens de l'inégalité — et développement, on a que (2) est équivalent à

$$x(x^2+11x+19)\geqslant 0$$

Le polynôme $x^2+11x+19$ possède deux racines $\frac{-11\pm3\sqrt{5}}{2}$ qui sont toutes deux < -1. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		$\frac{-11-3\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-11+3\sqrt{5}}{2}$		-1		0	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2+11x+19$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(x^2+11x+19)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

(remarquer que le coefficient de x^2 est >0 et donc que le polynôme du second degré est positif à l'extérieur de ses racines). Cependant, il faut se rappeler qu'on travaille ici sous la condition $x > -1$. Donc les solutions de (2) pour ce cas sont les $x \in [0,+\infty[$.

En regroupant les deux cas ci-dessus, on trouve que $\operatorname{Dom} f = [-9,-1[\cup[0,+\infty[$.

Question 6. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

(a) *Définissez « A est une matrice antisymétrique ».*

A est une matrice antisymétrique si, quel que soit $i \in \{1,\dots,n\}$ et quel que soit $j \in \{1,\dots,n\}$, on a

$$A_{ij} = -A_{ji} \tag{3}$$

Autrement dit, A est antisymétrique si $A = -A^t$.

(b) *Montrez que si A est une matrice antisymétrique, alors, quel que soit $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $A_{ii} = 0$.*

Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. Comme A est antisymétrique, on a, grâce à (3), que $A_{ii} = -A_{ii}$, c'est-à-dire $2A_{ii} = 0$. Donc $A_{ii} = 0$.

(c) *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par*

$$A_{ij} = 2^{i+j}(\pi i - \pi j)^3$$

Montrez que A est une matrice antisymétrique.

Soient $i, j \in \{1,\dots,n\}$. On a

$$\begin{aligned}
-A_{ji} &= -2^{i+j}(\pi j - \pi i)^3 && \text{(par définition de } A\text{)}\\
&= -2^{i+j}\big((-1)(\pi i - \pi j)\big)^3 && \text{(distributivité et commutativité)}\\
&= -2^{i+j}(-1)^3(\pi i - \pi j)^3 && \text{(propriété } \forall a,b \in \mathbb{R},\ (ab)^3 = a^3b^3\text{)}\\
&= 2^{i+j}(\pi i - \pi j)^3\\
&= A_{ij}
\end{aligned}$$

Question 7. *Calculer*

- $\sum_{i=-2}^{n} j = j(n+3)$ car j est une fonction constante par rapport à i.
- $$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j^2+j-1 &= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n}(j-1) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n\big((n+1)(2n+1)+3(n-1)\big)}{6} \\ &= \frac{n(n^2+3n-1)}{3}\end{aligned}$$
- $\sum_{j=0}^{n-1} 2j+1 = 2\sum_{j=0}^{n-1} j + \sum_{j=0}^{n-1} 1 = 2\frac{(n-1)n}{2} + n = n^2$

Question 8. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$

(a) *l'équation* $X^2 - 4(1-\boldsymbol{i}) = 0$

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 = 4(1-\boldsymbol{i})$, c'est-à-dire $X^2 = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(-\pi/4)$. Les solutions sont donc $x_1 = 2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}(-\pi/8)$ et $x_2 = -2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}(-\pi/8)$ ou, sous forme trigonométrique,

$$x_1 = 2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\Big(\frac{15\pi}{8}\Big) \quad \text{et} \quad x_2 = 2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\Big(\frac{7\pi}{8}\Big).$$

(b) *l'équation* $X^2 - 2X + \boldsymbol{i} = 0$

Il s'agit de résoudre l'équation axiliaire $X^2 = \Delta$ où $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot \boldsymbol{i} = 4 - 4\boldsymbol{i} = 4(1-\boldsymbol{i})$. On a résolu cette équation au premier point. Par conséquent les solutions de $X^2 - 2X + \boldsymbol{i} = 0$ sont

$$x_1 = \frac{-(-2)+2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}(15\pi/8)}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2)+2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}(7\pi/8)}{2}$$

c'est-à-dire $x_1 = 1 + \sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}(15\pi/8)$ et $x_2 = 1 + \sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}(7\pi/8)$.

Question 9. *Les définitions suivantes sont-elles des fonctions ?*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 = x$.

(b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 = x$.

En cas de réponse positive, donnez le domaine et l'image de la fonction. Veillez à justifier précisément vos réponses.

(a) f est une fonction car, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^3 = x$, à savoir $y = \sqrt[3]{x}$. Le domaine de f est l'ensemble des x tels que $y^3 = x$ possède (au moins) une solution y. Comme la racine cubique existe toujours, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. L'image de f est aussi $\mathbb{R}$. En effet, quel que soit $\bar{y} \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{y} = f(x)$. Un tel x est $\bar{y}^3$ car $f(\bar{y}^3) = \bar{y}$ (vu que $\bar{y}$ est solution de l'équation $y^3 = \bar{y}^3$).

(b) g n'est *pas* une fonction. En effet, pour $x = 1 \in \mathbb{C}$, l'équation $y^3 = 1$ possède, *dans* $\mathbb{C}$, trois solutions — qui sont $1 = \operatorname{cis} 0$, $\operatorname{cis}(2\pi/3)$ et $\operatorname{cis}(4\pi/3)$. Autrement dit, si on considère la relation $G \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ qui définit g :

$$G := \big\{(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : y^3 = x\big\},$$

on a que $(1,1) \in G$, $(1, \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}) \in G$ et $(1, \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}) \in G$. Ceci contredit la définition de fonction qui exige que pour chaque x, il existe au plus un y tel que $(x,y) \in G$.

Question 10. *Soit* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *et* θ *l'argument de* z. *Prouver que* <u>*les*</u> *solutions de l'équation* $X^n = z$ *sont* $|z|^{1/n} \operatorname{cis}\Big(\dfrac{k2\pi}{n} + \dfrac{\theta}{n}\Big)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Clairement, $|z|^{1/n} \operatorname{cis}\Big(\dfrac{k2\pi}{n} + \dfrac{\theta}{n}\Big)$ est solution de l'équation $X^n = z$ puisque

$$\begin{aligned}
\left(|z|^{1/n} \operatorname{cis}\Big(\frac{k2\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\Big)\right)^n &= \big(|z|^{1/n}\big)^n \left(\operatorname{cis}\Big(\frac{k2\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\Big)\right)^n \\
&= |z| \operatorname{cis}(k2\pi + \theta) && \text{(formule de De Moivre)} \\
&= |z| \operatorname{cis} \theta = z
\end{aligned}$$

D'autre part, on a vu au cours que $X^n = z$ a n solutions distinctes et comme on en a déjà n distinctes fournies par la formule, *on les a toutes*.