

# Mathématique Élémentaire

Test n° 6

(22 octobre 2007)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculer les sommes suivantes :

$$\blacksquare \sum_{i=-1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (i^2 - j^2) =$$

$$\blacksquare \sum_{i=-1}^{\ell} t^2 + i =$$

$$\blacksquare \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (i - j) =$$

/ 4

# Mathématique Élémentaire

Test n° 6

(22 octobre 2007)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Montrez que si  $A$  est une matrice inversible, alors l'inverse de  $A$  est unique.

/ 2

Question 3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations :

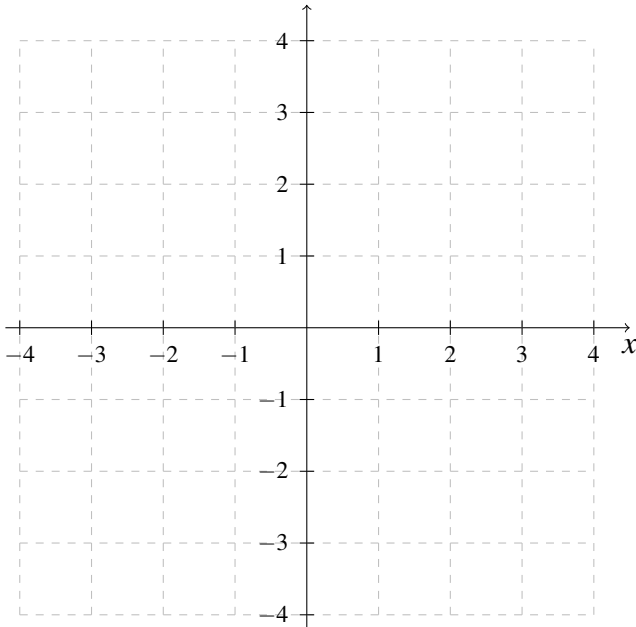
- $X^7 = 2$
- $X^2 + (3 - i)X + 2 = 0$

/ 4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Esquissez le graphe de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |1 - \sqrt{x+2}|$ . Expliquez votre démarche.

/ 4



Question 5. Écrivez l'ensemble  $A := \{x \in \mathbb{R} : |1 - \sqrt{x+2}| \leq 2\}$  comme une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

/ 4

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 6.

/ 4

(a) Vérifier que  $\left(1 - \frac{i}{2}\right)^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$ .

(b) Dédire de (a) toutes les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $Z^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$ . Donner ces solutions sous forme algébrique.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Soient les systèmes suivants, notés respectivement  $(S)$  et  $(S')$  :

$$(S) \begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S') \begin{cases} -3a_1x - 3a_2y = -3a_3 \\ (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)y = a_3 + b_3 \end{cases}$$

où, pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ . Montrez que si  $(\alpha, \beta)$  est solution du système  $(S')$ , alors  $(\alpha, \beta)$  est aussi solution du système  $(S)$ .

/ 3

Question 8. Prouvez qu'il existe un et un seul polynôme  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  de degré 3 tel que  $p(1) = 4$ ,  $p(2) = 15$  et  $p(3) = 40$ . Veillez à ce que vous écrivez réponde explicitement à la question.

/ 3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$  où  $k$  est un paramètre réel.

/6

- (a) Calculez l'inverse de  $A$  en fonction de  $k$ , en discutant si nécessaire.
- (b) Résolvez le système suivant en expliquant votre démarche :

$$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x + 10z = 10 \\ x + y + 9z = 20 \end{cases}$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page, si nécessaire.

Question 10. Soient  $N_{i,j}$  les nombres du tableau de Pascal. Prouvez que pour tout  $i, j$  vérifiant

$$1 \leq j+1 \leq i \tag{1}$$

on a  $N_{i,j} + N_{i,j+1} + N_{i+1,j+2} + N_{i+2,j+3} = N_{i+3,j+3}$ . Expliquez la raison de la condition (1).

/ 3