Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (22 octobre 2007) **Correction**

Question 1. *Calculer les sommes suivantes :*

- $$\sum_{i=-1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}(i^2-j^2) = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}(i^2-j^2) + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell}(-j^2)}_{i=0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell}(1-j^2)}_{i=-1}$$

  La première double somme vaut 0 car la matrice carrée $(i^2-j^2)_{1\leqslant i,j\leqslant \ell}$ est antisymétrique. On a donc

  $$\sum_{i=-1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}(i^2-j^2) = \sum_{j=1}^{\ell}1 - 2\sum_{j=1}^{\ell}j^2 = \ell - 2\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} = -\tfrac{1}{3}\ell(\ell+2)(2\ell-1)$$

- $$\sum_{i=-1}^{\ell}t^2+i = t^2\sum_{i=-1}^{\ell}1 + \left(\sum_{i=0}^{\ell}i\right) - 1 = t^2(\ell+2) + \frac{\ell(\ell+1)}{2} - 1 = (\ell+2)\left(t^2+\frac{\ell-1}{2}\right)$$
- $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(i-j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=i}^{n}1 - \sum_{j=0}^{n}j + \sum_{j=0}^{i-1}j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i(n+1-i) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(i-1)i}{2}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(-\tfrac{1}{2}i^2 + (n+\tfrac{1}{2})i - \frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} = -\tfrac{1}{6}n(n+1)(n-1)\end{aligned}$$

Question 2. *Soit $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Montrez que si A est une matrice inversible, alors l'inverse de A est unique.*

Considérons A_1 et A_2 deux matrices qui vérifient la définition disant qu'elles sont inverses de A c'est-à-dire que $AA_1 = \mathbb{1} = A_1A$ et aussi $AA_2 = \mathbb{1} = A_2A$. Montrons que $A_1 = A_2$. En effet,

$$\begin{aligned} A &= A_1\cdot\mathbb{1} \\ &= A_1AA_2 && \text{(par la relation } A_1A=\mathbb{1}\text{)}\\ &= (A_1A)A_2 && \text{(grâce à l'associativité du produit matriciel)}\\ &= \mathbb{1}A_2 && \text{(par la relation } A_1A=\mathbb{1}\text{)}\\ &= A_2 \end{aligned}$$

L'inverse de A est donc unique.

Question 3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :*

- $X^7 = 2$

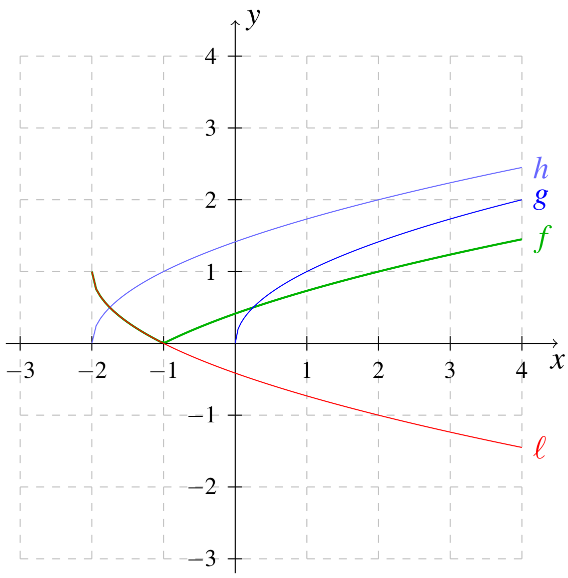
  $\sqrt[7]{2}$ est une solution de cette équation par définition de la racine septième d'un nombre réel. Par conséquent, toutes les solutions sont $\sqrt[7]{2}\operatorname{cis}(2k\pi/7)$, $k \in \{0,1,\dots,6\}$ car $\operatorname{cis}(2k\pi/7)$, $k \in \{0,1,\dots,6\}$ sont les racines septièmes de l'unité.

- $X^2 + (3-\boldsymbol{i})X + 2 = 0$

  Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = (3-\boldsymbol{i})^2 - 4\cdot 2 = -6\boldsymbol{i} = 6\operatorname{cis}(3\pi/2)$. Les deux racines de l'équation $Z^2 = \Delta$ sont donc $Z_1 = \sqrt{6}\operatorname{cis}(3\pi/4) = \sqrt{3}(\boldsymbol{i}-1)$ et $Z_2 = \sqrt{6}\operatorname{cis}(7\pi/4) = \sqrt{3}(1-\boldsymbol{i})$ (c'est l'opposée de Z_1). Les solutions de l'équation de départ sont donc

$$X_1 = \frac{-(3-\boldsymbol{i})+Z_1}{2} = \frac{-3+\boldsymbol{i}+\sqrt{3}(\boldsymbol{i}-1)}{2} = \frac{-3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$$
$$X_2 = \frac{-(3-\boldsymbol{i})+Z_2}{2} = \frac{-3+\boldsymbol{i}-\sqrt{3}(\boldsymbol{i}-1)}{2} = \frac{-3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$$

Question 4. *Esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \left|1-\sqrt{x+2}\right|$. Expliquez votre démarche.*



On commence par tracer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est une fonction élémentaire. Ensuite, la fonction $h(x) = g(x+2) = \sqrt{x+2}$ a pour graphe celui de g translaté horizontalement de deux unité vers la gauche. Pour tracer le graphe de la fonction $\ell(x) = 1 - g(x) = 1 - \sqrt{x+2}$, on fait d'abord subir à celui de g une symétrie orthogonale d'axe x (on a alors le graphe de $-g$) et on le translate verticalement d'une unité vers le haut. Finalement, pour avoir le graphe de f, on prend celui de ℓ pour les x tels que $\ell(x) \geqslant 0$ (c'est-à-dire tels que $(x,\ell(x))$ est au dessus de l'axe des x) et on prend le symétrique orthogonal par rapport à l'axe des x des points $(x,\ell(x))$ en dessous de l'axe des x.

Question 5. *Écrivez l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R} : \left|1-\sqrt{x+2}\right| \leqslant 2\}$ comme une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).*

Tout d'abord, remarquons que l'expression $\left|1-\sqrt{x+2}\right|$ n'est définie que si $x+2 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant -2$. Nous supposerons donc dans les calculs qui suivent que cette condition est satisfaite. L'équivalence $|\xi| \leqslant c \Leftrightarrow (-c \leqslant \xi$ et $\xi \leqslant c)$ appliquée à l'inéquation de départ dit que

$$\begin{aligned}\left|1-\sqrt{x+2}\right| \leqslant 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 \leqslant 1-\sqrt{x+2} \text{ et } 1-\sqrt{x+2} \leqslant 2\\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} \leqslant 3 \text{ et } -1 \leqslant \sqrt{x+2}\\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} \leqslant 3\end{aligned}$$

où la dernière équivalence résulte du fait que l'inégalité $-1 \leqslant \sqrt{x+2}$ est toujours vérifiée car -1 est négatif et $\sqrt{x+2}$ est positif. Comme les deux membres de la dernière inégalité sont positifs, on peut élever au carré chacun d'eux sans perdre ni gagner de solutions :

$$\begin{aligned}\left|1-\sqrt{x+2}\right| \leqslant 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x+2 \leqslant 9\\ &\Leftrightarrow \quad x \leqslant 7\end{aligned}$$

En se rappelant qu'on ne travaillait qu'avec les x plus grands ou égaux à -2, on conclut que $A = \{x \in [-2,+\infty[: x \leqslant 7\} = [-2,7]$.

REMARQUE : En regardant le graphe tracé à la question 4, on voit que A — qui est l'ensemble des abcisses telles que le graphe de f est en dessous de la droite horizontale $y = 2$ — est un intervalle fermé partant de -2 et finissant en un point > 4.

Question 6.

(a) *Vérifier que* $\left(1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}\boldsymbol{i}$.

$$\left(1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^4 = \left(\left(1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^2\right)^2 = \left(1^2+\frac{\boldsymbol{i}^2}{4}-2\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}-\boldsymbol{i}\right)^2 = \frac{9}{16}+\boldsymbol{i}^2-2\boldsymbol{i}\frac{3}{4} = -\frac{7}{16}-\frac{3}{2}\boldsymbol{i}$$

(b) *Déduire de (a) toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}\boldsymbol{i}$. Donner ces solutions sous forme algébrique.*

Le point (a) nous dit que $1-\boldsymbol{i}/2$ est une solution de l'équation

$$Z^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}\boldsymbol{i} \tag{1}$$

Donc les solutions de l'équation (1) sont les complexes obtenus par multiplication de $1-\boldsymbol{i}/2$ avec les solutions de $Z^4 = 1$, c'est-à-dire

$$\left(1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)\cdot 1, \qquad \left(1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)\cdot \boldsymbol{i}, \qquad \left(1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)(-1), \qquad \left(1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)(-\boldsymbol{i}).$$

ou encore

$$1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}, \qquad \frac{1}{2}+\boldsymbol{i}, \qquad -1+\frac{\boldsymbol{i}}{2}, \qquad -\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}.$$

Question 7. *Soient les systèmes suivants, notés respectivement* (S) *et* (S') *:*

$$(S)\begin{cases} a_1x+a_2y=a_3 \\ b_1x+b_2y=b_3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S')\begin{cases} -3a_1x-3a_2y=-3a_3 \\ (a_1+b_1)x+(a_2+b_2)y=a_3+b_3 \end{cases}$$

où, pour tout $i\in\{1,2,3\}$, $a_i,b_i,c_i\in\mathbb{R}$. *Montrez que si* (α,β) *est solution du système* (S'), *alors* (α,β) *est aussi solution du système* (S).

Supposons que (α,β) est une solution du système (S'), c'est-à-dire que (α,β) vérifie chaque équation du système (S'). On a donc

$$-3a_1\alpha-3a_2\beta=-3a_3 \tag{2}$$
$$\text{et} \quad (a_1+b_1)\alpha+(a_2+b_2)\beta=a_3+b_3 \tag{3}$$

Montrons que (α,β) est une solution du système (S), c'est-à-dire qu'on a

$$a_1\alpha+a_2\beta=a_3 \tag{4}$$
$$\text{et} \quad b_1\alpha+b_2\beta=b_3 \tag{5}$$

En simplifiant par -3 dans (2), on obtient $a_1\alpha+a_2\beta=a_3$. Donc (α,β) satisfait (4). L'égalité (3) s'écrit $a_1\alpha+b_1\alpha+a_2\beta+b_2\beta=a_3+b_3$. Comme on sait que $a_1\alpha+a_2\beta=a_3$ par (4), on obtient que $b_1\alpha+b_2\beta=b_3$. On a donc que (α,β) satisfait (5). On a ainsi montré que (α,β) vérifie les deux équations du système (S), c'est-à-dire que (α,β) est solution de ce système.

Question 8. *Prouvez qu'*il existe un et un seul *polynôme* $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ *de degré* 3 *tel que* $p(1)=4$, $p(2)=15$ *et* $p(3)=40$. *Veillez à ce que vous écrivez réponde explicitement à la question.*

La condition $p(1)=4$ s'explicite en $1+a+b+c=4$, la condition $p(2)=15$ dit que $8+4a+2b+c=15$ et la condition $p(3)=40$ dit que $27+9a+3b+c=40$. Montrer que le polynôme recherché existe et est unique revient à montrer que le système

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a+2b+c=7 \\ 9a+3b+c=13 \end{cases}$$

possède une et une seule solution. La matrice aumentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

Échelonnons cette matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -6 & -8 & -14 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2\leftarrow L_2-4L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-9L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2/(-2) \\ L_3 \leftarrow L_3/(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 \cdot (-2) \end{array}$$

La troisième ligne dit que $c = 1$. La deuxième ligne dit que $b + \frac{3}{2}c = \frac{5}{2}$, c'est-à-dire que $b = 1$. Enfin, la première ligne dit que $a + b + c = 3$, c'est-à-dire que $a = 1$. Le système a donc une unique solution qui est $(1, 1, 1)$. Le polynôme recherché est $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Question 9. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$ *où k est un paramètre réel.*

(a) *Calculez l'inverse de A en fonction de k, en discutant si nécessaire.*

Utilisons la méthode de la matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Supposons que $k \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/k \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - kL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (k+1)L_3 \\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1/k & 1 & -(k+1)/k \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -L_2 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/k & -1 & (k+1)/k \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

À la ligne (6), si $k = 0$ alors la troisième ligne ne contient que des zéros. On ne peut donc pas calculer l'inverse de A car il ne sera pas possible d'appliquer des transformations sur A pour la transformer en $\mathbb{1}$.

(b) *Résolvez le système suivant en expliquant votre démarche :*

$$\begin{cases} x+y-z=10 \\ x+10z=10 \\ x+y+9z=20 \end{cases}$$

Dans A, posons $k=10$. Le système s'écrit alors

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche les deux membres par A^{-1}, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{où, en posant } k=10 \text{ dans } A^{-1} \text{ on a } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/10 & 1 & 11/10 \\ -1/10 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions du système est donc $\{(0,11,1)\}$.

Question 10. *Soient $N_{i,j}$ les nombres du tableau de Pascal. Prouvez que pour tout i, j vérifiant*

$$1 \leqslant j+1 \leqslant i \tag{7}$$

on a $N_{i,j}+N_{i,j+1}+N_{i+1,j+2}+N_{i+2,j+3} = N_{i+3,j+3}$. Expliquez la raison de la condition (7).

On a vu que

$$\text{pour tout } i, j \text{ tels que } 0 \leqslant j \leqslant i,\ N_{i,j} \text{ est défini} \tag{8}$$

par le tableau de Pascal. D'autre part, on a vu que $N_{i,j}+N_{i,j+1} = N_{i+1,j+1}$. Vu (8), cette formule n'est valable que si $j+1 \leqslant i$ (à moins de poser $N_{i,i+1}=0$). Donc, sous cette condition, $N_{i,j}+N_{i,j+1} = N_{i+1,j+1}$. Par conséquent $N_{i+1,j+1}+N_{i+1,j+2} = N_{i+2,j+2}$ et finalement $N_{i+2,j+2}+N_{i+2,j+3} = N_{i+3,j+3}$.