

Question 1. Calculer les sommes suivantes :

$$\blacksquare \sum_{i=-1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (i^2 - j^2) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (i^2 - j^2) + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} (-j^2)}_{i=0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} (1 - j^2)}_{i=-1}$$

La première double somme vaut 0 car la matrice carrée $(i^2 - j^2)_{1 \leq i, j \leq \ell}$ est antisymétrique. On a donc

$$\sum_{i=-1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (i^2 - j^2) = \sum_{j=1}^{\ell} 1 - 2 \sum_{j=1}^{\ell} j^2 = \ell - 2 \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} = -\frac{1}{3}\ell(\ell+2)(2\ell-1)$$

$$\blacksquare \sum_{i=-1}^{\ell} t^2 + i = t^2 \sum_{i=-1}^{\ell} 1 + \left(\sum_{i=0}^{\ell} i \right) - 1 = t^2(\ell+2) + \frac{\ell(\ell+1)}{2} - 1 = (\ell+2) \left(t^2 + \frac{\ell-1}{2} \right)$$

$$\blacksquare \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (i-j) = \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=i}^n 1 - \sum_{j=0}^n j + \sum_{j=0}^{i-1} j \right) = \sum_{i=1}^n \left(i(n+1-i) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(i-1)i}{2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2}i^2 + (n+\frac{1}{2})i - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} = -\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$$

Question 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrez que si A est une matrice inversible, alors l'inverse de A est unique.

Considérons A_1 et A_2 deux matrices qui vérifient la définition disant qu'elles sont inverses de A c'est-à-dire que $AA_1 = \mathbb{1} = A_1A$ et aussi $AA_2 = \mathbb{1} = A_2A$. Montrons que $A_1 = A_2$. En effet,

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cdot \mathbb{1} \\ &= A_1 A A_2 && \text{(par la relation } A_1 A = \mathbb{1} \text{)} \\ &= (A_1 A) A_2 && \text{(grâce à l'associativité du produit matriciel)} \\ &= \mathbb{1} A_2 && \text{(par la relation } A_1 A = \mathbb{1} \text{)} \\ &= A_2 \end{aligned}$$

L'inverse de A est donc unique.

Question 3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

■ $X^7 = 2$

$\sqrt[7]{2}$ est une solution de cette équation par définition de la racine septième d'un nombre réel. Par conséquent, toutes les solutions sont $\sqrt[7]{2} \operatorname{cis}(2k\pi/7)$, $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$ car $\operatorname{cis}(2k\pi/7)$, $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$ sont les racines septièmes de l'unité.

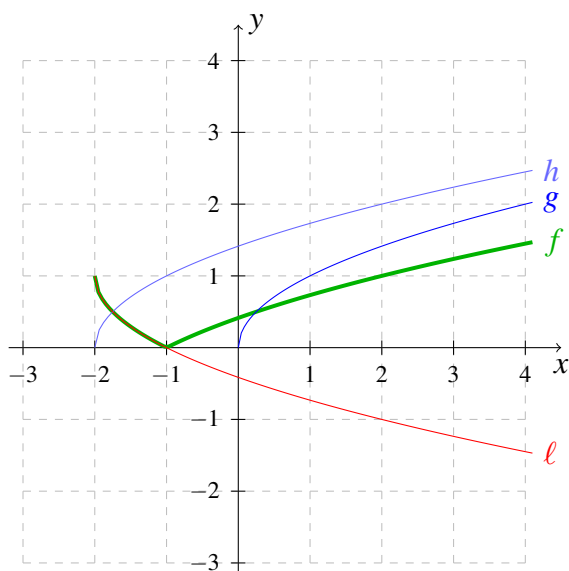
■ $X^2 + (3 - i)X + 2 = 0$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = (3 - i)^2 - 4 \cdot 2 = -6i = 6 \operatorname{cis}(3\pi/2)$. Les deux racines de l'équation $Z^2 = \Delta$ sont donc $Z_1 = \sqrt{6} \operatorname{cis}(3\pi/4) = \sqrt{3}(i - 1)$ et $Z_2 = \sqrt{6} \operatorname{cis}(7\pi/4) = \sqrt{3}(1 - i)$ (c'est l'opposée de Z_1). Les solutions de l'équation de départ sont donc

$$X_1 = \frac{-(3 - i) + Z_1}{2} = \frac{-3 + i + \sqrt{3}(i - 1)}{2} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$$

$$X_2 = \frac{-(3 - i) + Z_2}{2} = \frac{-3 + i - \sqrt{3}(i - 1)}{2} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$$

Question 4. Esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |1 - \sqrt{x+2}|$. Expliquez votre démarche.



On commence par tracer la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est une fonction élémentaire. Ensuite, la fonction $h(x) = g(x + 2) = \sqrt{x + 2}$ a pour graphe celui de g translaté horizontalement de deux unités vers la gauche. Pour tracer le graphe de la fonction $\ell(x) = 1 - g(x) = 1 - \sqrt{x + 2}$, on fait d'abord subir à celui de g une symétrie orthogonale d'axe x (on a alors le graphe de $-g$) et on le translate verticalement d'une unité vers le haut. Finalement, pour avoir le graphe de f , on prend celui de ℓ pour les x tels que $\ell(x) \geq 0$ (c'est-à-dire tels que $(x, \ell(x))$ est au dessus de l'axe des x) et on prend le symétrique orthogonal par rapport à l'axe des x des points $(x, \ell(x))$ en dessous de l'axe des x .

Question 5. Écrivez l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R} : |1 - \sqrt{x+2}| \leq 2\}$ comme une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Tout d'abord, remarquons que l'expression $|1 - \sqrt{x+2}|$ n'est définie que si $x+2 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq -2$. Nous supposons donc dans les calculs qui suivent que cette condition est satisfaite. L'équivalence $|\xi| \leq c \Leftrightarrow (-c \leq \xi \text{ et } \xi \leq c)$ appliquée à l'inéquation de départ dit que

$$\begin{aligned} |1 - \sqrt{x+2}| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq 1 - \sqrt{x+2} \text{ et } 1 - \sqrt{x+2} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \leq 3 \text{ et } -1 \leq \sqrt{x+2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \leq 3 \end{aligned}$$

où la dernière équivalence résulte du fait que l'inégalité $-1 \leq \sqrt{x+2}$ est toujours vérifiée car -1 est négatif et $\sqrt{x+2}$ est positif. Comme les deux membres de la dernière inégalité sont positifs, on peut élever au carré chacun d'eux sans perdre ni gagner de solutions :

$$\begin{aligned} |1 - \sqrt{x+2}| \leq 2 &\Leftrightarrow x+2 \leq 9 \\ &\Leftrightarrow x \leq 7 \end{aligned}$$

En se rappelant qu'on ne travaillait qu'avec les x plus grands ou égaux à -2 , on conclut que $A = \{x \in [-2, +\infty[: x \leq 7\} = [-2, 7]$.

REMARQUE : En regardant le graphe tracé à la question 4, on voit que A — qui est l'ensemble des abscisses telles que le graphe de f est en dessous de la droite horizontale $y = 2$ — est un intervalle fermé partant de -2 et finissant en un point > 4 .

Question 6.

(a) Vérifier que $(1 - \frac{i}{2})^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$.

$$(1 - \frac{i}{2})^4 = \left((1 - \frac{i}{2})^2 \right)^2 = \left(1^2 + \frac{i^2}{4} - 2 \cdot \frac{i}{2} \right)^2 = \left(\frac{3}{4} - i \right)^2 = \frac{9}{16} + i^2 - 2i \cdot \frac{3}{4} = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$$

(b) Dédurre de (a) toutes les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $Z^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$. Donner ces solutions sous forme algébrique.

Le point (a) nous dit que $1 - i/2$ est une solution de l'équation

$$Z^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i \tag{1}$$

Donc les solutions de l'équation (1) sont les complexes obtenus par multiplication de $1 - i/2$ avec les solutions de $Z^4 = 1$, c'est-à-dire

$$\left(1 - \frac{i}{2}\right) \cdot 1, \quad \left(1 - \frac{i}{2}\right) \cdot i, \quad \left(1 - \frac{i}{2}\right) \cdot (-1), \quad \left(1 - \frac{i}{2}\right) \cdot (-i).$$

ou encore

$$1 - \frac{i}{2}, \quad \frac{1}{2} + i, \quad -1 + \frac{i}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i.$$

Question 7. Soient les systèmes suivants, notés respectivement (S) et (S') :

$$(S) \begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S') \begin{cases} -3a_1x - 3a_2y = -3a_3 \\ (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)y = a_3 + b_3 \end{cases}$$

où, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Montrez que si (α, β) est solution du système (S') , alors (α, β) est aussi solution du système (S) .

Supposons que (α, β) est une solution du système (S') , c'est-à-dire que (α, β) vérifie chaque équation du système (S') . On a donc

$$-3a_1\alpha - 3a_2\beta = -3a_3 \tag{2}$$

$$\text{et} \quad (a_1 + b_1)\alpha + (a_2 + b_2)\beta = a_3 + b_3 \tag{3}$$

Montrons que (α, β) est une solution du système (S) , c'est-à-dire qu'on a

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3 \tag{4}$$

$$\text{et} \quad b_1\alpha + b_2\beta = b_3 \tag{5}$$

En simplifiant par -3 dans (2), on obtient $a_1\alpha + a_2\beta = a_3$. Donc (α, β) satisfait (4). L'égalité (3) s'écrit $a_1\alpha + b_1\alpha + a_2\beta + b_2\beta = a_3 + b_3$. Comme on sait que $a_1\alpha + a_2\beta = a_3$ par (4), on obtient que $b_1\alpha + b_2\beta = b_3$. On a donc que (α, β) satisfait (5). On a ainsi montré que (α, β) vérifie les deux équations du système (S) , c'est-à-dire que (α, β) est solution de ce système.

Question 8. Prouvez qu'il existe un et un seul polynôme $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de degré 3 tel que $p(1) = 4$, $p(2) = 15$ et $p(3) = 40$. Veillez à ce que vous écrivez réponde explicitement à la question.

La condition $p(1) = 4$ s'explique en $1 + a + b + c = 4$, la condition $p(2) = 15$ dit que $8 + 4a + 2b + c = 15$ et la condition $p(3) = 40$ dit que $27 + 9a + 3b + c = 40$. Montrer que le polynôme recherché existe et est unique revient à montrer que le système

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

possède une et une seule solution. La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 13 \end{array} \right)$$

Échelonons cette matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -6 & -8 & -14 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 5/2 \\ 0 & 3 & 4 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 / (-2) \\ L_3 \leftarrow L_3 / (-2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 5/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & | & -1/2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 \cdot (-2)$$

La troisième ligne dit que $c = 1$. La deuxième ligne dit que $b + \frac{3}{2}c = \frac{5}{2}$, c'est-à-dire que $b = 1$. Enfin, la première ligne dit que $a + b + c = 3$, c'est-à-dire que $a = 1$. Le système a donc une unique solution qui est $(1, 1, 1)$. Le polynôme recherché est $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Question 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$ où k est un paramètre réel.

(a) Calculez l'inverse de A en fonction de k , en discutant si nécessaire.

Utilisons la méthode de la matrice compagne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Supposons que $k \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 / k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - kL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (k+1)L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow -L_2 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/k & -1 & (k+1)/k \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

À la ligne (6), si $k = 0$ alors la troisième ligne ne contient que des zéros. On ne peut donc pas calculer l'inverse de A car il ne sera pas possible d'appliquer des transformations sur A pour la transformer en $\mathbb{1}$.

(b) Résolvez le système suivant en expliquant votre démarche :

$$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x + 10z = 10 \\ x + y + 9z = 20 \end{cases}$$

Dans A, posons $k = 10$. Le système s'écrit alors

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche les deux membres par A^{-1} , on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{où, en posant } k = 10 \text{ dans } A^{-1} \text{ on a } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/10 & -1 & 11/10 \\ -1/10 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions du système est donc $\{(0, 11, 1)\}$.

Question 10. Soient $N_{i,j}$ les nombres du tableau de Pascal. Prouvez que pour tout i, j vérifiant

$$1 \leq j+1 \leq i \tag{7}$$

on a $N_{i,j} + N_{i,j+1} + N_{i+1,j+2} + N_{i+2,j+3} = N_{i+3,j+3}$. Expliquez la raison de la condition (7).

On a vu que

$$\text{pour tout } i, j \text{ tels que } 0 \leq j \leq i, N_{i,j} \text{ est défini} \tag{8}$$

par le tableau de Pascal. D'autre part, on a vu que $N_{i,j} + N_{i,j+1} = N_{i+1,j+1}$. Vu (8), cette formule n'est valable que si $j+1 \leq i$ (à moins de poser $N_{i,i+1} = 0$). Donc, sous cette condition, $N_{i,j} + N_{i,j+1} = N_{i+1,j+1}$. Par conséquent $N_{i+1,j+1} + N_{i+1,j+2} = N_{i+2,j+2}$ et finalement $N_{i+2,j+2} + N_{i+2,j+3} = N_{i+3,j+3}$.