

Question 1. Calculer les sommes suivantes :

$$\blacksquare \sum_{i=-1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (i^2 - j^2) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (i^2 - j^2) + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} (-j^2)}_{i=0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} (1 - j^2)}_{i=-1}$$

La première double somme vaut 0 car la matrice carrée  $(i^2 - j^2)_{1 \leq i, j \leq \ell}$  est antisymétrique. On a donc

$$\sum_{i=-1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (i^2 - j^2) = \sum_{j=1}^{\ell} 1 - 2 \sum_{j=1}^{\ell} j^2 = \ell - 2 \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} = -\frac{1}{3}\ell(\ell+2)(2\ell-1)$$

$$\blacksquare \sum_{i=-1}^{\ell} t^2 + i = t^2 \sum_{i=-1}^{\ell} 1 + \left( \sum_{i=0}^{\ell} i \right) - 1 = t^2(\ell+2) + \frac{\ell(\ell+1)}{2} - 1 = (\ell+2) \left( t^2 + \frac{\ell-1}{2} \right)$$

$$\blacksquare \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (i-j) = \sum_{i=1}^n \left( i \sum_{j=i}^n 1 - \sum_{j=0}^n j + \sum_{j=0}^{i-1} j \right) = \sum_{i=1}^n \left( i(n+1-i) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(i-1)i}{2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{2}i^2 + (n+\frac{1}{2})i - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} = -\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$$

Question 2. Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Montrez que si  $A$  est une matrice inversible, alors l'inverse de  $A$  est unique.

Considérons  $A_1$  et  $A_2$  deux matrices qui vérifient la définition disant qu'elles sont inverses de  $A$  c'est-à-dire que  $AA_1 = \mathbb{1} = A_1A$  et aussi  $AA_2 = \mathbb{1} = A_2A$ . Montrons que  $A_1 = A_2$ . En effet,

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cdot \mathbb{1} \\ &= A_1 A A_2 && \text{(par la relation } A_1 A = \mathbb{1} \text{)} \\ &= (A_1 A) A_2 && \text{(grâce à l'associativité du produit matriciel)} \\ &= \mathbb{1} A_2 && \text{(par la relation } A_1 A = \mathbb{1} \text{)} \\ &= A_2 \end{aligned}$$

L'inverse de  $A$  est donc unique.

Question 3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations :

■  $X^7 = 2$

$\sqrt[7]{2}$  est une solution de cette équation par définition de la racine septième d'un nombre réel. Par conséquent, toutes les solutions sont  $\sqrt[7]{2} \operatorname{cis}(2k\pi/7)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$  car  $\operatorname{cis}(2k\pi/7)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$  sont les racines septièmes de l'unité.

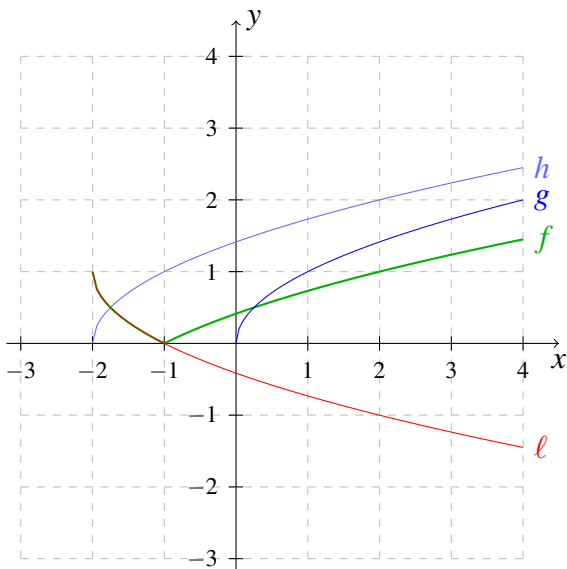
■  $X^2 + (3 - i)X + 2 = 0$

Le discriminant de cette équation vaut  $\Delta = (3 - i)^2 - 4 \cdot 2 = -6i = 6 \operatorname{cis}(3\pi/2)$ . Les deux racines de l'équation  $Z^2 = \Delta$  sont donc  $Z_1 = \sqrt{6} \operatorname{cis}(3\pi/4) = \sqrt{3}(i - 1)$  et  $Z_2 = \sqrt{6} \operatorname{cis}(7\pi/4) = \sqrt{3}(1 - i)$  (c'est l'opposée de  $Z_1$ ). Les solutions de l'équation de départ sont donc

$$X_1 = \frac{-(3 - i) + Z_1}{2} = \frac{-3 + i + \sqrt{3}(i - 1)}{2} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$$

$$X_2 = \frac{-(3 - i) + Z_2}{2} = \frac{-3 + i - \sqrt{3}(i - 1)}{2} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$$

Question 4. Esquissez le graphe de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |1 - \sqrt{x+2}|$ . Expliquez votre démarche.



On commence par tracer la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$  qui est une fonction élémentaire. Ensuite, la fonction  $h(x) = g(x+2) = \sqrt{x+2}$  a pour graphe celui de  $g$  translaté horizontalement de deux unités vers la gauche. Pour tracer le graphe de la fonction  $\ell(x) = 1 - g(x) = 1 - \sqrt{x+2}$ , on fait d'abord subir à celui de  $g$  une symétrie orthogonale d'axe  $x$  (on a alors le graphe de  $-g$ ) et on le translate verticalement d'une unité vers le haut. Finalement, pour avoir le graphe de  $f$ , on prend celui de  $\ell$  pour les  $x$  tels que  $\ell(x) \geq 0$  (c'est-à-dire tels que  $(x, \ell(x))$  est au dessus de l'axe des  $x$ ) et on prend le symétrique orthogonal par rapport à l'axe des  $x$  des points  $(x, \ell(x))$  en dessous de l'axe des  $x$ .

**Question 5.** Écrivez l'ensemble  $A := \{x \in \mathbb{R} : |1 - \sqrt{x+2}| \leq 2\}$  comme une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Tout d'abord, remarquons que l'expression  $|1 - \sqrt{x+2}|$  n'est définie que si  $x+2 \geq 0$ , c'est-à-dire si  $x \geq -2$ . Nous supposons donc dans les calculs qui suivent que cette condition est satisfaite. L'équivalence  $|\xi| \leq c \Leftrightarrow (-c \leq \xi \text{ et } \xi \leq c)$  appliquée à l'inéquation de départ dit que

$$\begin{aligned} |1 - \sqrt{x+2}| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq 1 - \sqrt{x+2} \text{ et } 1 - \sqrt{x+2} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \leq 3 \text{ et } -1 \leq \sqrt{x+2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \leq 3 \end{aligned}$$

où la dernière équivalence résulte du fait que l'inégalité  $-1 \leq \sqrt{x+2}$  est toujours vérifiée car  $-1$  est négatif et  $\sqrt{x+2}$  est positif. Comme les deux membres de la dernière inégalité sont positifs, on peut élever au carré chacun d'eux sans perdre ni gagner de solutions :

$$\begin{aligned} |1 - \sqrt{x+2}| \leq 2 &\Leftrightarrow x+2 \leq 9 \\ &\Leftrightarrow x \leq 7 \end{aligned}$$

En se rappelant qu'on ne travaillait qu'avec les  $x$  plus grands ou égaux à  $-2$ , on conclut que  $A = \{x \in [-2, +\infty[ : x \leq 7\} = [-2, 7]$ .

REMARQUE : En regardant le graphe tracé à la question 4, on voit que  $A$  — qui est l'ensemble des abscisses telles que le graphe de  $f$  est en dessous de la droite horizontale  $y = 2$  — est un intervalle fermé partant de  $-2$  et finissant en un point  $> 4$ .

**Question 6.**

(a) Vérifier que  $(1 - \frac{i}{2})^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$ .

$$(1 - \frac{i}{2})^4 = \left( (1 - \frac{i}{2})^2 \right)^2 = \left( 1^2 + \frac{i^2}{4} - 2 \cdot \frac{i}{2} \right)^2 = \left( \frac{3}{4} - i \right)^2 = \frac{9}{16} + i^2 - 2i \cdot \frac{3}{4} = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$$

(b) Dédurre de (a) toutes les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $Z^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$ . Donner ces solutions sous forme algébrique.

Le point (a) nous dit que  $1 - i/2$  est une solution de l'équation

$$Z^4 = -\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i \tag{1}$$

Donc les solutions de l'équation (1) sont les complexes obtenus par multiplication de  $1 - i/2$  avec les solutions de  $Z^4 = 1$ , c'est-à-dire

$$\left(1 - \frac{i}{2}\right) \cdot 1, \quad \left(1 - \frac{i}{2}\right) \cdot i, \quad \left(1 - \frac{i}{2}\right) \cdot (-1), \quad \left(1 - \frac{i}{2}\right) \cdot (-i).$$

ou encore

$$1 - \frac{i}{2}, \quad \frac{1}{2} + i, \quad -1 + \frac{i}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i.$$

Question 7. Soient les systèmes suivants, notés respectivement  $(S)$  et  $(S')$  :

$$(S) \begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S') \begin{cases} -3a_1x - 3a_2y = -3a_3 \\ (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)y = a_3 + b_3 \end{cases}$$

où, pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ . Montrez que si  $(\alpha, \beta)$  est solution du système  $(S')$ , alors  $(\alpha, \beta)$  est aussi solution du système  $(S)$ .

Supposons que  $(\alpha, \beta)$  est une solution du système  $(S')$ , c'est-à-dire que  $(\alpha, \beta)$  vérifie chaque équation du système  $(S')$ . On a donc

$$-3a_1\alpha - 3a_2\beta = -3a_3 \tag{2}$$

$$\text{et} \quad (a_1 + b_1)\alpha + (a_2 + b_2)\beta = a_3 + b_3 \tag{3}$$

Montrons que  $(\alpha, \beta)$  est une solution du système  $(S)$ , c'est-à-dire qu'on a

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3 \tag{4}$$

$$\text{et} \quad b_1\alpha + b_2\beta = b_3 \tag{5}$$

En simplifiant par  $-3$  dans (2), on obtient  $a_1\alpha + a_2\beta = a_3$ . Donc  $(\alpha, \beta)$  satisfait (4). L'égalité (3) s'écrit  $a_1\alpha + b_1\alpha + a_2\beta + b_2\beta = a_3 + b_3$ . Comme on sait que  $a_1\alpha + a_2\beta = a_3$  par (4), on obtient que  $b_1\alpha + b_2\beta = b_3$ . On a donc que  $(\alpha, \beta)$  satisfait (5). On a ainsi montré que  $(\alpha, \beta)$  vérifie les deux équations du système  $(S)$ , c'est-à-dire que  $(\alpha, \beta)$  est solution de ce système.

Question 8. Prouvez qu'il existe un et un seul polynôme  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  de degré 3 tel que  $p(1) = 4$ ,  $p(2) = 15$  et  $p(3) = 40$ . Veuillez à ce que vous écrivez réponse explicitement à la question.

La condition  $p(1) = 4$  s'explique en  $1 + a + b + c = 4$ , la condition  $p(2) = 15$  dit que  $8 + 4a + 2b + c = 15$  et la condition  $p(3) = 40$  dit que  $27 + 9a + 3b + c = 40$ . Montrer que le polynôme recherché existe et est unique revient à montrer que le système

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

possède une et une seule solution. La matrice augmentée du système est

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 13 \end{array} \right)$$

Échelonnons cette matrice :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -6 & -8 & -14 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 5/2 \\ 0 & 3 & 4 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 / (-2) \\ L_3 \leftarrow L_3 / (-2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 5/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & | & -1/2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 \cdot (-2)$$

La troisième ligne dit que  $c = 1$ . La deuxième ligne dit que  $b + \frac{3}{2}c = \frac{5}{2}$ , c'est-à-dire que  $b = 1$ . Enfin, la première ligne dit que  $a + b + c = 3$ , c'est-à-dire que  $a = 1$ . Le système a donc une unique solution qui est  $(1, 1, 1)$ . Le polynôme recherché est  $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ .

Question 9. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$  où  $k$  est un paramètre réel.

(a) Calculez l'inverse de  $A$  en fonction de  $k$ , en discutant si nécessaire.

Utilisons la méthode de la matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Supposons que  $k \neq 0$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 / k \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - kL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (k+1)L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1/k & 1 & -(k+1)/k \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow -L_2 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/k & -1 & (k+1)/k \\ -1/k & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

À la ligne (6), si  $k = 0$  alors la troisième ligne ne contient que des zéros. On ne peut donc pas calculer l'inverse de  $A$  car il ne sera pas possible d'appliquer des transformations sur  $A$  pour la transformer en  $\mathbb{1}$ .

(b) Résolvez le système suivant en expliquant votre démarche :

$$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x + 10z = 10 \\ x + y + 9z = 20 \end{cases}$$

Dans  $A$ , posons  $k = 10$ . Le système s'écrit alors

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche les deux membres par  $A^{-1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{où, en posant } k = 10 \text{ dans } A^{-1} \text{ on a } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/10 & 1 & 11/10 \\ -1/10 & 0 & 1/10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système est donc  $\{(0, 11, 1)\}$ .

Question 10. Soient  $N_{i,j}$  les nombres du tableau de Pascal. Prouvez que pour tout  $i, j$  vérifiant

$$1 \leq j + 1 \leq i \tag{7}$$

on a  $N_{i,j} + N_{i,j+1} + N_{i+1,j+2} + N_{i+2,j+3} = N_{i+3,j+3}$ . Expliquez la raison de la condition (7).

On a vu que

$$\text{pour tout } i, j \text{ tels que } 0 \leq j \leq i, N_{i,j} \text{ est défini} \tag{8}$$

par le tableau de Pascal. D'autre part, on a vu que  $N_{i,j} + N_{i,j+1} = N_{i+1,j+1}$ . Vu (8), cette formule n'est valable que si  $j + 1 \leq i$  (à moins de poser  $N_{i,i+1} = 0$ ). Donc, sous cette condition,  $N_{i,j} + N_{i,j+1} = N_{i+1,j+1}$ . Par conséquent  $N_{i+1,j+1} + N_{i+1,j+2} = N_{i+2,j+2}$  et finalement  $N_{i+2,j+2} + N_{i+2,j+3} = N_{i+3,j+3}$ .