Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2008)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient $m < n$ deux nombres entiers. Calculez /4

- $\sum\limits_{i=m+1}^{n} 1 =$
- $\sum\limits_{i=m+1}^{n} (i+j) =$
- $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=m+1}^{n} (i+j) =$
- $\sum\limits_{j=1}^{27} \binom{27}{j} =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soient les matrices /5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} x & xy & y \\ 0 & 0 & x \\ y & 0 & y \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} z & 0 & zx \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$$

Calculez BA, $\text{dét}\,C$, $\text{dét}(DE)$.

Question 3. Calculez /3

- $(3+\boldsymbol{i})(7-\boldsymbol{i})^{-1} =$
- $|2+\boldsymbol{i}| =$
- $|3-\boldsymbol{i}| =$
- $|(2+\boldsymbol{i})(3-\boldsymbol{i})^{-1}| =$

Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2008)

Nom : ...
Prénom : ...
Section : ...

Question 4. Soient les ensembles

/8

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (x,y,z) \text{ est un vecteur qui est simultanément orthogonal aux vecteurs } (1,-2,3) \text{ et } (4,-1,-1)\big\}$$

$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (x,y,z) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{7}\big\}$$

(a) A-t-on

- $(0,0,0) \in A$?
  Oui/non[1] car ....

  ....
- $(-3,0,1) \in A$?
  Oui/non[1] car ....

  ....
- $\left(-\frac{5\pi}{13}, -\pi, -\frac{7\pi}{13}\right) \in B$?
  Oui/non[1] car ....

  ....

(b) A-t-on $A \subseteq B$?

[1] Biffez la mention inutile.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite).

(c) A-t-on $B \subseteq A$?

Question 5. Prouvez que

/6

- $\bar{z}$ est l'inverse de z *si et seulement si* $|z| = 1$.

- $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$

- $\forall n \geqslant 1,\ \bar{z}^{-n} = \overline{z^{-n}}$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Écrivez le domaine de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{4-x}}{x}}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). /5

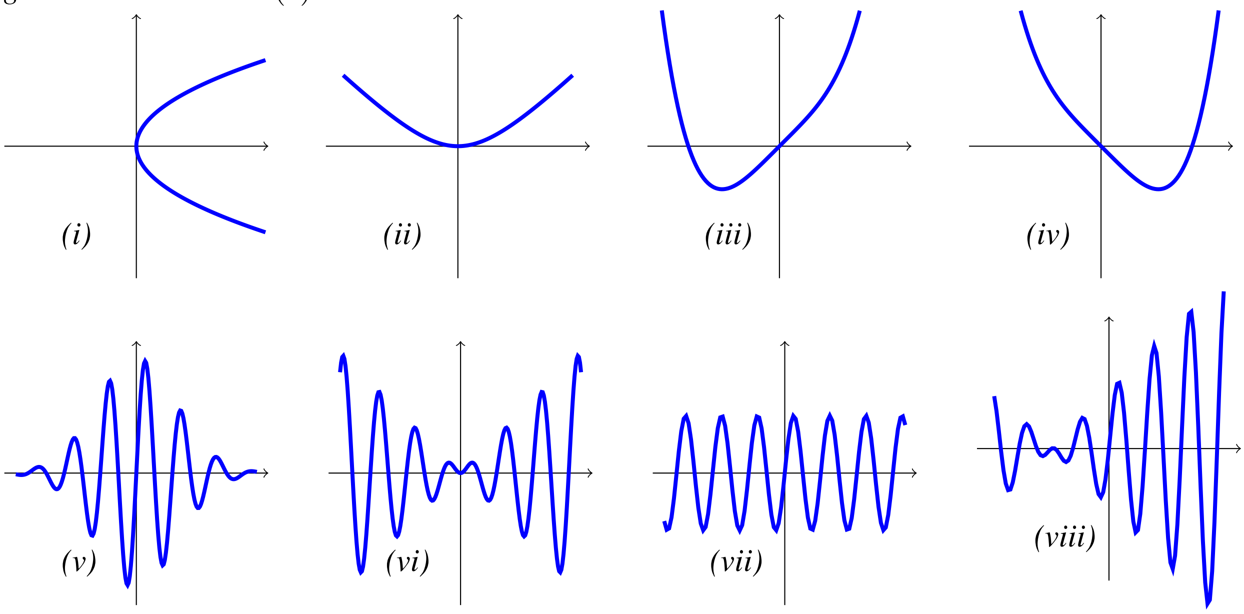
Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 7. Parmi les graphes ci dessous, Repérez ceux des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 + x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin(x)$. Justifiez brièvement vos choix. /4

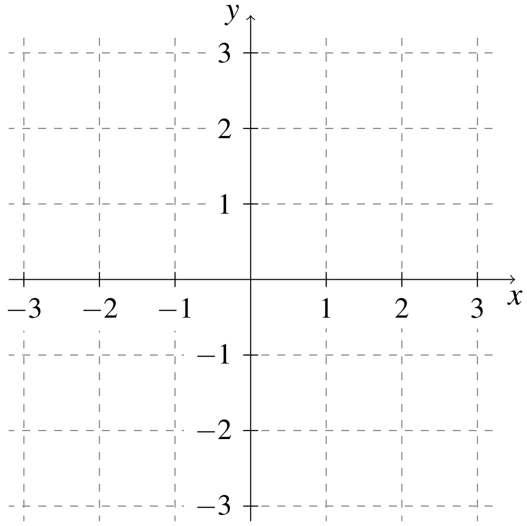


Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Déterminez l'image de la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(t^{1/3} - 1, \ln t^{2/3}\right)$. Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs. Tracez $\operatorname{Im}\gamma$ sur le graphe ci-dessous. Expliquez votre démarche. /8



Nom :

Prénom :

Section :

/8

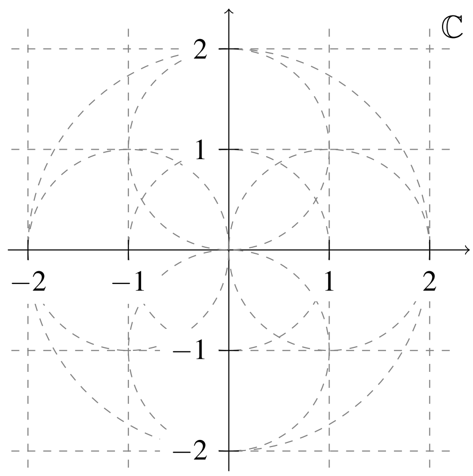
Question 9. Calculez $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$ pour $n \geqslant 0$.

(a) Donner une formule pour z_n en fonction de n mod 3.

(b) Représentez les z_n dans le plan complexe.

(c) Vérifiez que $(2+\boldsymbol{i})^3 = 2+11\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez les solutions complexes de $Z^3 = 2+11\boldsymbol{i}$.



Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2008)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Soit le système /7

$$\begin{cases} x+y+\lambda z=0 \\ \lambda x+(\lambda+1)y+\lambda z=\lambda \\ \lambda x+y+z=2\lambda \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Dites pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède une solution unique.

(b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 11.

/6

(a) Calculez $\sum_{m=1}^{k} 2^{m-1}$

(b) Soit la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(c) Calculez $\sum_{n=1}^{k} M^n$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 12. Calculez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+p}} + \operatorname{arctg}(q/x)$ où p et q sont des paramètres réels. /3

Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2008)

Nom :

Prénom :

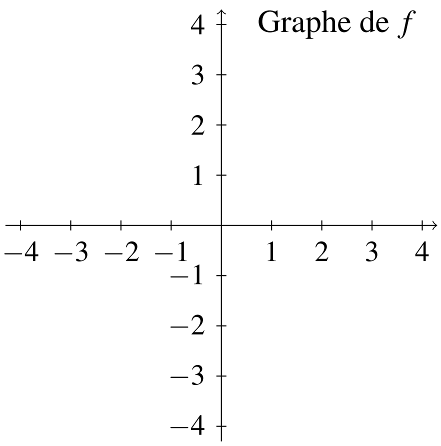
Section : Agrég math & phys

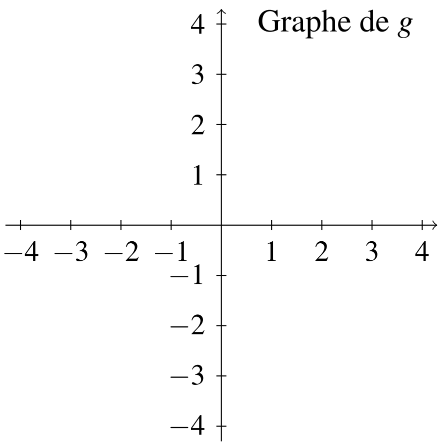
Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Cet examen comporte une partie similaire à celle des étudiants de BAC 1 et une partie qui vous est propre. Pour réussir, il est nécessaire d'avoir la moyenne pour chacune de ces deux parties.
- Les explications et justifications de vos réponses doivent être conçues comme destinées à vos (futurs) élèves de secondaire. Nous vous recommendons d'êtres attentifs à ce point. Ceci ne doit cependant pas être utilisé comme excuse pour dire les choses uniquement intuitivement ou pour manquer de précision ou de rigeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Tracez les graphes des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 + x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sin(x)$. Justifiez vos constructions. $/6$





Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

Question 2. Écrivez le domaine de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{4-x}}{x}}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). $/5$

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 3. Prouvez que

$/6$

- $\bar{z}$ est l'inverse de z *si et seulement si* $|z| = 1$.
- $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$
- $\forall n \geqslant 1,\ \bar{z}^{-n} = \overline{z^{-n}}$

Mathématique Élémentaire

Examen (27 octobre 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

/8

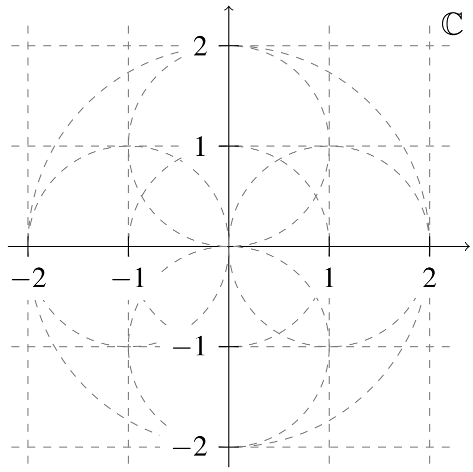
Question 4. Calculez $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$ pour $n \geqslant 0$.

(a) Donner une formule pour z_n en fonction de n mod 3.

(b) Représentez les z_n dans le plan complexe.

(c) Vérifiez que $(2+\boldsymbol{i})^3 = 2 + 11\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez les solutions complexes de $Z^3 = 2 + 11\boldsymbol{i}$.



Mathématique Élémentaire

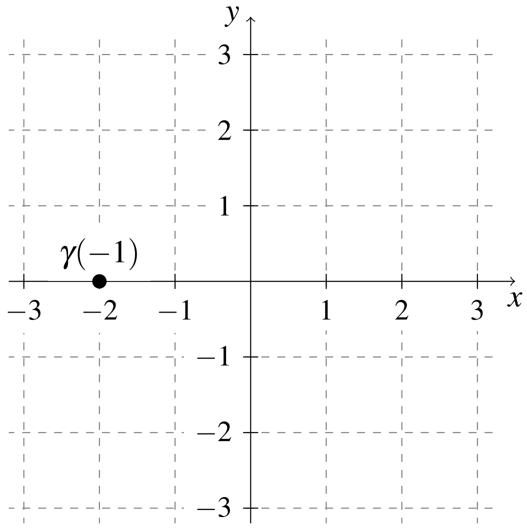
Examen (27 octobre 2008)

Nom :

Prénom :

Section : Agrég math & phys

Question 5. Déterminez l'image de la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(t^{1/3} - 1, \ln t^{2/3}\big)$. Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs. Tracez $\operatorname{Im}\gamma$ sur le graphe ci-dessous. Calculez l'équation de la tangente à $\operatorname{Im}\gamma$ en $\gamma(-1)$ et tracez-la sur ce même graphe. Expliquez votre démarche. /8



Nom :	
Prénom :	
Section : Agrég math & phys	

Question 6. Soit le système

/7

$$\begin{cases} x+y+\lambda z=0 \\ \lambda x+(\lambda+1)y+\lambda z=\lambda \\ \lambda x+y+z=2\lambda \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Dites pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède une solution unique.

(b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nom :

Prénom :

Section : Agrég math & phys

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 7. Calculez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} + \operatorname{arctg}(q/x)$ où p et q sont des paramètres réels. /3

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

/8

Question 8. Soient les ensembles

$$A = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; (x,y,z) \text{ est un vecteur qui est simultanément orthogonal aux vecteurs } (1,-2,3) \text{ et } (4,-1,-1)\Big\}$$

$$B = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; (x,y,z) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{7}\Big\}$$

(a) A-t-on

- $(0,0,0) \in A$?
  Oui/non[1] car ....

  ....
- $(-3,0,1) \in A$?
  Oui/non[1] car ....

  ....
- $\left(-\frac{5\pi}{13}, -\pi, -\frac{7\pi}{13}\right) \in B$?
  Oui/non[1] car ....

  ....

(b) A-t-on $A = B$?

[1] Biffez la mention inutile.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

Partie spécifique aux étudiants de l'agrégation.

Question 9. /10

(a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donnez la définition en ε-δ de « f est continue en $a \in \operatorname{Dom} f$ ».

(b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui vérifie au point a la propriété suivante : il existe D_1 une droite d'équation $Y = a_1 X + b_1$ et D_2 une droite d'équation $Y = a_2 X + b_2$ telles que

- $D_1 \cap D_2 = \{(a, f(a)\}$;
- D_1 est de pente positive et D_2 est de pente négative ;
- il existe $\rho > 0$ tel que,
  - $\forall x \in]a-\rho, a[,\ a_1 x + b_1 < f(x) < a_2 x + b_2$ et
  - $\forall x \in]a, a+\rho[,\ a_2 x + b_2 < f(x) < a_1 x + b_1$

Au moyen de la définition en ε-δ donnée ci-dessus, prouvez que f est continue en a.

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouvez $(\forall a > 0,\ |x| < a) \Rightarrow x = 0$. $/3$

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

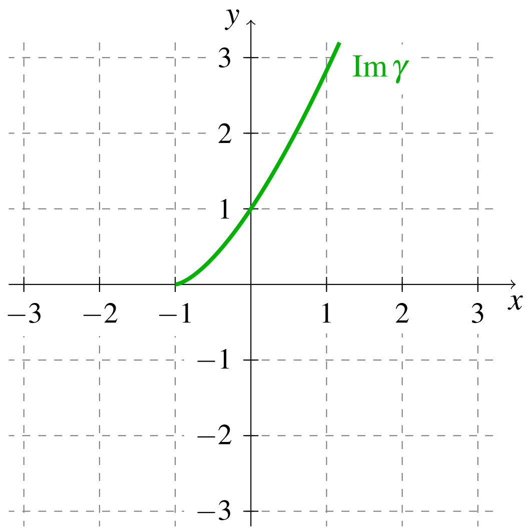
Question 11. On considère la question :

> *Déterminez l'image de la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2-1, t^3)$. Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs. Tracez $\operatorname{Im}\gamma$ sur le graphe ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

/5

Voici la copie d'un étudiant. Corrigez-la. Tenez compte de la rigueur mathématique ainsi que de la qualité de la rédaction en français.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y) = f(t) \\ &\qquad\qquad \textit{pour un certain } t\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y) = (t^2-1,t^3) \\ &\qquad\qquad \textit{pour un certain } t\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = t^2-1 \textit{ et } y = t^3 \\ &\qquad\qquad \textit{pour un certain } t\in\mathbb{R}\} = A\end{aligned}$$



Nous allons montrer que A est égal à l'ensemble

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = y^{2/3}-1\}$$

- *$A\subseteq B$. Soit (x,y) un élément de A tel que $x=t^2-1$ et $y=t^3$ pour un certain $t\in\mathbb{R}$. Il faut montrer que $(x,y)\in B$, c'est-à-dire que (x,y) doit être solution de $x = y^{2/3}-1$. On remplace : $t^2-1 = (t^3)^{2/3}-1$, i.e. $t^2=t^2$.*
  $\Rightarrow$ On a bien $A\subseteq B$.
- *$B\subseteq A$. Soit (x,y) un élément de B tel que $x=y^{2/3}-1$. Il faut montrer que $(x,y)\in A$, c'est-à-dire que $x=t^2-1$ et $y=t^3$ pour un certain $t\in\mathbb{R}$. On a l'équation $x=y^{2/3}-1$. Si $y=t^3$, on a bien $x=t^2-1$ car $x=(t^3)^{2/3}-1 \Leftrightarrow x=t^2-1$.*
  $\Rightarrow$ On a bien $B\subseteq A$.

Tracer $\operatorname{Im} f$. On a $y=(x+1)^{3/2}$. La seule racine est -1. La fonction est toujours positive car c'est une racine carée (elle se trouve au dessus de l'axe des x).

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

Question 12. Un étudiant prouve que $1 = 2$ en utilisant le raisonnement suivant : /3

Soit a et b tels que

$$a = b. \tag{1}$$

On fait les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
a^2 &= ab && \textit{(on multiplie par } a\textit{)}\\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 && \textit{(on soustrait } b^2\textit{)}\\
(a+b)(a-b) &= b(a-b) && \textit{(on factorise chaque membre)}\\
a+b &= b && \textit{(on simplifie le terme commun } a-b\textit{)}
\end{aligned}$$

En utilisant (1) *dans cette dernière égalité, on obtient* $2b = b$, *c'est-à-dire* $2 = 1$.

Que lui répondez-vous ?