# Mathématique Élémentaire

## Examen (27 octobre 2008) Correction

Question 1. *Soient $m < n$ deux nombres entiers. Calculez*

- $\sum_{i=m+1}^{n} 1 = n-m$ car il s'agit de sommer pour les valeurs de $i$ entre $m+1$ et $n$ avec $m<n$.
- $$\begin{aligned}\sum_{i=m+1}^{n}(i+j) &= \sum_{i=m+1}^{n} i + \sum_{i=m+1}^{n} j = \sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{m} i + j(n-m) \qquad \text{(voir le point précédent)}\\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} + j(n-m) = \frac{n^2-m^2+n-m}{2} + j(n-m)\\ &= (n-m)\Big(j + \frac{n+m+1}{2}\Big)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=m+1}^{n}(i+j) &= \sum_{j=1}^{n}(n-m)\Big(j+\frac{n+m+1}{2}\Big) \qquad \text{(vu le point précédent)}\\ &= n(n-m)\frac{n+m+1}{2} + \sum_{j=1}^{n}(n-m)j\\ &= n(n-m)\frac{n+m+1}{2} + (n-m)\frac{n(n+1)}{2}\\ &= (n-m)\Big(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{nm}{2}\Big) = (n-m)\big(n(n+1) + \tfrac{1}{2}nm\big)\end{aligned}$$
- $$\sum_{j=1}^{27}\binom{27}{j} = \sum_{j=0}^{27}\binom{27}{j}1^j1^{27-j} - \sum_{j=0}^{0}\binom{27}{j} = (1+1)^{27} - 1 = 2^{27}-1$$

Question 2. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 4 & 27\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix}x & xy & y\\ 0 & 0 & x\\ y & 0 & y\end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix}z & 0 & zx\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & z^2\end{pmatrix}$$

*Calculez $BA$, $\text{dét}C$, $\text{dét}(DE)$.*

- $BA = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$
- $C$ est triangulaire (supérieure), son déterminant est donc le produit des éléments de sa diagonale, c'est-à-dire $\text{dét}C = 24$.

- $DE = \begin{pmatrix} x & xy & y \\ 0 & 0 & x \\ y & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 & zx \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz & xy & x^2z+xy^2+yz^2 \\ 0 & 0 & xz^2 \\ yz & 0 & xyz+yz^2 \end{pmatrix}$.
  En développant par rapport à la deuxième colonne, on a :

$$\text{dét}(DE) = xy(-1)^{1+2}\,\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & xz^2 \\ yz & xyz+yz^2 \end{pmatrix} = -xy(0-xyz^3) = x^2y^2z^3.$$

REMARQUE : Comme vous le verrez dans le cours d'algèbre linéaire, $\text{dét}(DE) = \text{dét}\,D \cdot \text{dét}\,E$.

Question 3. *Calculez*

- $(3+\boldsymbol{i})(7-\boldsymbol{i})^{-1} = (3+\boldsymbol{i})\dfrac{7+\boldsymbol{i}}{50} = \dfrac{20}{50} + \dfrac{10}{50}\boldsymbol{i} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\boldsymbol{i}$
  (où on a utilisé le fait que $(a+b\boldsymbol{i})^{-1} = \dfrac{a-b\boldsymbol{i}}{a^2+b^2}$)
- $|2+\boldsymbol{i}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$
- $|3-\boldsymbol{i}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} = \sqrt{2}\sqrt{5}$
- $|(2+\boldsymbol{i})(3-\boldsymbol{i})^{-1}| = |2+\boldsymbol{i}||(3-\boldsymbol{i})^{-1}| = |2+\boldsymbol{i}|\,|(3-\boldsymbol{i})|^{-1} = \sqrt{5}(\sqrt{2})^{-1}(\sqrt{5})^{-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
  (où on a utilisé le fait que $|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'|$ et $|z^n| = |z|^n$).

Question 4. *Soient les ensembles*

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)$ *est un vecteur qui est simultanément orthogonal aux vecteurs* $(1,-2,3)$ *et* $(4,-1,-1)\}$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)$ *est un vecteur directeur de la droite* $D \equiv \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{13} = \dfrac{z-3}{7}\}$

(a) *A-t-on*

- $(0,0,0) \in A$ ?
  Oui car $(0,0,0)$ est orthogonal aux vecteurs $(1,-2,3)$ et $(4,-1,-1)$. En effet $\big((0,0,0) \mid (1,-2,3)\big) = 1\cdot 0 - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0$ et $\big((0,0,0) \mid (4,-1,-1)\big) = 0$.

- $(-3,0,1) \in A$ ?
  Non car $(-3,0,1)$ n'est pas orthogonal au vecteur $(4,-1,-1)$ puisque $\big((-3,0,1) \mid (4,-1,-1)\big) = -12+0-1 = -13$.

- $\left(-\frac{5\pi}{13}, -\pi, -\frac{7\pi}{13}\right) \in B$ ?
  Oui car un vecteur directeur de $D$ est donné par $(5,13,7)$. Tout vecteur de la forme $\lambda(5,13,7)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, est aussi un vecteur directeur de $D$. Or $\left(-\frac{5\pi}{13}, -\pi, -\frac{7\pi}{13}\right) = \frac{-\pi}{13}(5,13,7)$.

(b) *A-t-on $A \subseteq B$ ?*

Non. Pour le montrer, exhibons un élément de $A$ qui n'est pas un élément de $B$. Considérons le vecteur $(0,0,0)$. On a montré au point (a) que $(0,0,0) \in A$. Mais $(0,0,0) \notin B$ car $(0,0,0)$ n'est pas un vecteur directeur de $D$ puisqu'on a dit qu'un tel vecteur est de la forme $\lambda(5,13,7)$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) *A-t-on $B \subseteq A$ ?*

Oui. Soit $(x,y,z) \in B$ c'est-à-dire que $(x,y,z)$ est un vecteur directeur de $D$. $(x,y,z)$ est donc de la forme $\lambda(5,13,7) = (5\lambda, 13\lambda, 7\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrons que $(x,y,z) \in A$, c'est-à-dire $(x,y,z)$ est orthogonal aux vecteurs $(1,-2,3)$ et $(4,-1,-1)$. On a :

$$\big((1,-2,3) \mid (5\lambda, 13\lambda, 7\lambda)\big) = 5\lambda - 26\lambda + 21\lambda = 0$$
$$\big((4,-1,-1) \mid (5\lambda, 13\lambda, 7\lambda)\big) = 20\lambda - 13\lambda - 7\lambda = 0$$

Question 5. *Prouvez que*

- $\bar{z}$ *est l'inverse de* $z$ si et seulement si $|z| = 1$.

  On sait que
  $$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \tag{1}$$
  Donc si $\bar{z} = z^{-1}$, on a $\bar{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, c'est-à-dire $1 = \dfrac{1}{|z|^2}$ ou $|z|^2 = 1$, c'est-à-dire $|z| = 1$ car $|z| \geqslant 0$. Réciproquement, si $|z| = 1$, alors (1) implique que $z^{-1} = \bar{z}$.

- $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$

  En subtituant $z$ par $\bar{z}$ dans (1), on obtient $\bar{z}^{-1} = \dfrac{\bar{\bar{z}}}{|\bar{z}|^2} = \dfrac{z}{|z|^2}$ et, en prenant le conjugué des deux membres de (1), on a $\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\right)} = \dfrac{\bar{\bar{z}}}{\overline{|z|^2}} = \dfrac{z}{|z|^2}$ car $|z| \in \mathbb{R}$ et $\bar{\bar{z}} = z$.

- $\forall n \geqslant 1$, $\bar{z}^{-n} = \overline{z^{-n}}$

  Les propriétés vues au cours et la dernière ci-dessus impliquent que $\overline{z^{-n}} = \overline{(z^n)^{-1}} = \overline{z^n}^{-1} = (\bar{z}^n)^{-1} = \bar{z}^{-n}$.

Question 6. *Écrivez le domaine de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{4-x}}{x}}$ *sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).*

Les conditions pour que l'expression qui définit $f$ ait un sens sont

- $x - 2 \neq 0$ (i.e., $x \neq 2$) car ce terme est au dénominateur (il n'y a pas d'autre conditions pour le sinus car $\sin \xi$ existe quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$) ;
- $1 - \frac{\sqrt{4-x}}{x} \geqslant 0$ car on en prend la racine ;
- $4 - x \geqslant 0$ (i.e., $x \leqslant 4$) car on en prend la racine ;
- $x \neq 0$ car il est au dénominateur.

À l'exception de la seconde, ces conditions disent que $x \in \left]-\infty, 0\right[ \cup \left]0, 2\right[ \cup \left]2, 4\right]$. Il s'agit maintenant de résoudre $1 - \frac{\sqrt{4-x}}{x} \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{4-x}}{x} \leqslant 1 \tag{2}$$

Distinguons deux cas selon le signe du dénominateur $x$ :

- Si $x < 0$, alors le membre de gauche de (2) est négatif (c'est le quotient de $\sqrt{4-x} \geqslant 0$ par $x < 0$) et donc est $\leqslant 1$. Par conséquent, tous les $x < 0$ vérifient (2).
- Si $x > 0$, alors on peut multiplier les deux membres par $x$ et on obtient l'inégalité équivalente $\sqrt{4-x} \leqslant x$. Comme les deux membres de cette dernière inégalité sont positifs, on peut les élever au carré et obtenir une inégalité équivalente

  $$4 - x \leqslant x^2 \qquad \text{ou encore} \qquad x^2 + x - 4 \geqslant 0.$$

  Le tableau de signe de ce polynôme est

  | $x$ | | $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ | | $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ | |
  |---|---|---|---|---|---|
  | $x^2+x-4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

  Comme on travaille avec des $x > 0$, les solutions pour ce cas sont $x \in \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right[$.

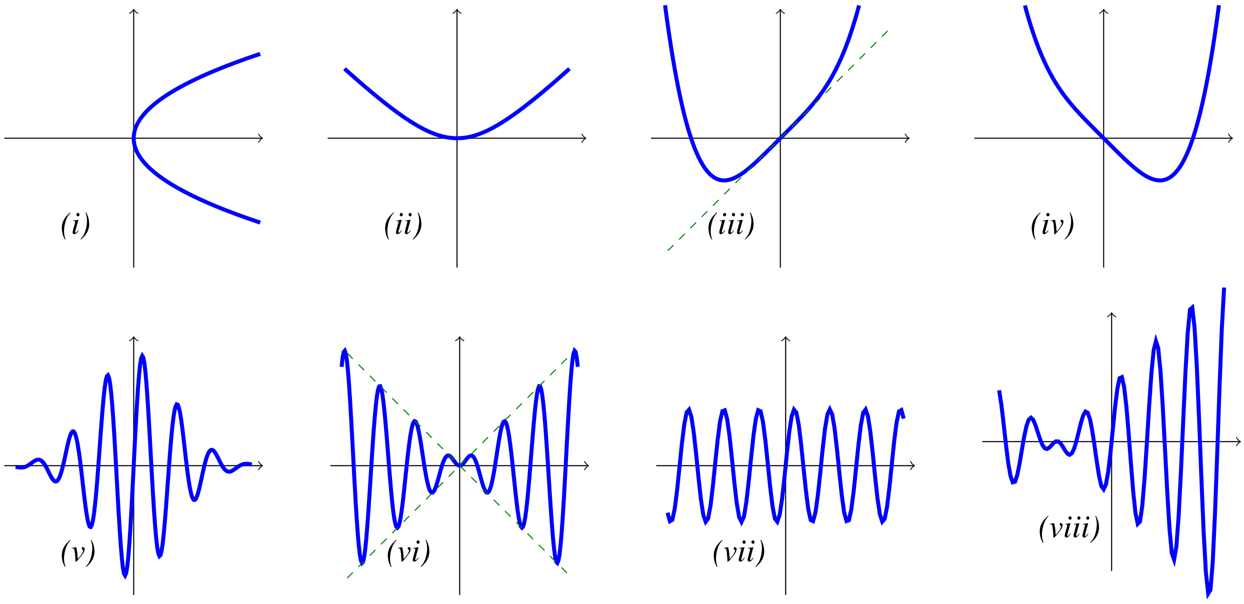
Par conséquent,

$$x \text{ satisfait (2)} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, 0\right[ \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right[$$

En faisant l'intersection avec les autres conditions d'existence, on a

$$\operatorname{Dom} f = \left]-\infty, 0\right[ \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2\right[ \cup \left]2, 4\right].$$

Question 7. *Parmi les graphes ci dessous, Repérez ceux des fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 + x$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sin(x)$. *Justifiez brièvement vos choix.*




Le graphe de $f$ est (iii). En effet, c'est le seul qui possède une unique racine négative (les racines de $f$ sont $-1$ et 0). On peut de plus remarquer que, si $x \approx 0$, alors $x^4 \ll x$ et donc $f(x) \approx x$.

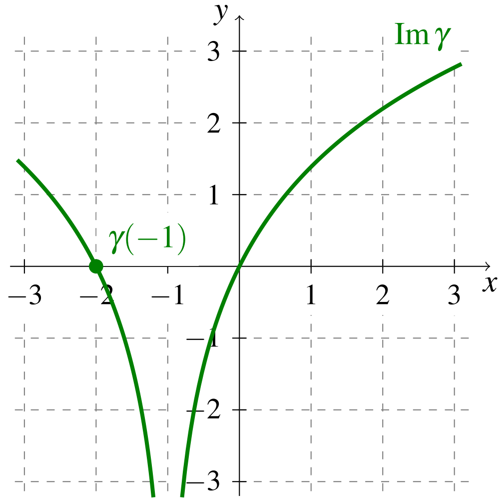
Le graphe de $g$ est (vi). Tout d'abord, on remarque que $g$ est une fonction paire : $g(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x\sin x = g(x)$. Le graphe de $g$ doit donc être symétrique par rapport à l'axe des $y$. Ceci ne laisse que (ii) et (vi) comme possibilités. On peut aussi remarquer que, si $x \approx 0$, alors $\sin x \approx x$ et donc $f(x) \approx x^2$. Ceci ne permet cependant pas de choisir entre (ii) et (vi).

Comme $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on a $-|x| \leqslant f(x) \leqslant |x|$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (pouvez-vous le montrer ?). De plus, chaque fois que $\sin x = 1$ (resp. $-1$), i.e., pour $x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ (resp. $x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$), on a $g(x) = x$ (resp. $g(x) = -x$). Le graphe de $g$ touche donc périodiquement les droites $y = x$ et $y = -x$. Le seul dessin qui répond à ces propriétés additionnelles est (vi).

Question 8. *Déterminez l'image de la fonction* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(t^{1/3} - 1, \ln t^{2/3}\right)$. *Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs. Tracez* $\operatorname{Im}\gamma$ *sur le graphe ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

La définition de l'image dit

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\gamma &= \{(x,y) \mid \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y) = \gamma(t)\}\\ &= \{(x,y) \mid \exists t \in \mathbb{R},\ (x,y) = \left(t^{1/3} - 1, \ln t^{2/3}\right)\}\\ &= \left\{(x,y) \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = t^{1/3} - 1 \\ y = \ln t^{2/3} \end{cases}\right\}\end{aligned}$$




Nous allons montrer que $\operorname{Im}\gamma$ n'est rien d'autre que l'ensemble

$$A := \{(x,y) \mid y = 2\ln|x+1|\}.$$

Pour cela, il est nécessaire de montrer deux inclusions.

- $\operatorname{Im}\gamma \subseteq A$. Soit $(x,y)$ un point de $\operatorname{Im}\gamma$, c'est-à-dire un point tel qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ (dont on sait qu'il existe mais qu'on ne peut choisir) tel que
$$x = t^{1/3} - 1 \quad \text{et} \quad y = \ln t^{2/3}.$$
La première équation se réécrit $x+1 = t^{1/3}$ ou encore (il n'y a pas de condition pour élever au cube) $(x+1)^3 = t$. En substituant cette expression pour $t$ dans la seconde égalité, on obtient $y = \ln\big((x+1)^3\big)^{2/3} = \ln(x+1)^2 = 2\ln|x+1|$. (Il ne faut pas oublier la valeur absolue dans le dernier terme, $\ln\xi^2$ est défini dès que $\xi \neq 0$ alors que $\ln\xi$ requiert $\xi > 0$. Dérivation : $\ln\xi^2 = \ln(|\xi|^2) = 2\ln|\xi|$.) Le fait que $(x,y)$ satisfasse l'égalité $y = 2\ln|x+1|$ implique que $(x,y) \in A$.
- $A \subseteq \operatorname{Im}\gamma$. Soit $(x,y)$ un point de $A$, c'est-à-dire un point solution de l'équation $y = 2\ln|x+1|$. On veut montrer que $(x,y) \in \operatorname{Im}\gamma$, c'est-à-dire qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$x = t^{1/3} - 1 \quad \text{et} \quad y = \ln t^{2/3}. \tag{3}$$
Prenons $t = (x+1)^3$. On a $x = t^{1/3} - 1$ car, en substituant $t$ par sa valeur, on obtient $x = \big((x+1)^3\big)^{1/3} - 1 = (x+1) - 1$ ce qui est vrai. On a également que $y = \ln t^{2/3}$ car, en substituant $t$ par sa valeur, cette égalité devient $y = \ln\big((x+1)^3\big)^{2/3} = \ln(x+1)^2 = 2\ln|x+1|$ qui est vrai par l'hypothèse $(x,y) \in A$. La valeur de $t$ choisie satisfaisant les deux égalités de (3), on a bien $(x,y) \in \operatorname{Im}\gamma$.

Tracer $\operatorname{Im}\gamma$ revient donc à tracer les points satisfaisant l'équation $y = 2\ln|x+1|$. Il s'agit du graphe de la fonction $h : x \mapsto 2\ln|x+1|$. Lorsque $x+1>0$ (i.e., $x > -1$), rien de plus facile : il s'agit du graphe de la fonction $x \mapsto \ln x$ translaté de 1 unité vers la gauche et dilaté d'un facteur 2 dans la direction des $y$. Lorsque $x+1<0$, c'est le symétrique orthogonal de la partie à droite de $-1$ par la droite d'équation $x=-1$. En effet, on a $h(-1-\xi) = h(-1+\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

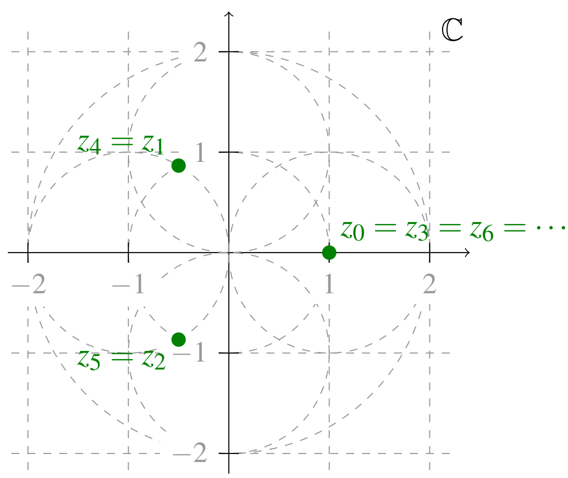
**Question 9.** *Calculez* $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$ *pour* $n \geqslant 0$.

(a) *Donner une formule pour* $z_n$ *en fonction de* $n \bmod 3$.

(b) *Représentez les* $z_n$ *dans le plan complexe.*

(c) *Vérifiez que* $(2+\boldsymbol{i})^3 = 2 + 11\boldsymbol{i}$.

(d) *Donnez les solutions complexes de* $Z^3 = 2 + 11\boldsymbol{i}$.



(a) $z_n = \left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \operatorname{cis}\left(n\frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi\right)$. Remarquons que $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$. Clairement

$$z_3 = z_1^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^3 = \operatorname{cis}\frac{3\cdot 2\pi}{3} = \operatorname{cis} 0 = 1.$$

Divisons $n$ par 3 et écrivons $n = q\cdot 3 + (n \bmod 3)$ où $q \in \mathbb{N}$ est le quotient de la division. Donc $z_n = z_1^n = z_1^{q\cdot 3 + n \bmod 3} = z_1^{q\cdot 3} z_1^{n \bmod 3} = (z_1^3)^q z_1^{n \bmod 3} = 1^q z_1^{n \bmod 3} = z_1^{n \bmod 3}$. Il s'ensuit que

$$z_n = z_1^{n \bmod 3} = \operatorname{cis}\left((n \bmod 3)\frac{2\pi}{3}\right).$$

(b) Voir graphique ci-dessus.

(c) $(2+\boldsymbol{i})^3 = (2+\boldsymbol{i})^2(2+\boldsymbol{i}) = (4+4\boldsymbol{i}-1)(2+\boldsymbol{i}) = (3+4\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i}) = (6-4)+3\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{i} = 2+11\boldsymbol{i}$.

(d) Les solutions complexes de $Z^3 = 2+11\boldsymbol{i}$ sont données par les $z^*u$ avec $z^*$ une solution de $Z^3 = 2+11\boldsymbol{i}$ (on peut prendre $z^* = 2+\boldsymbol{i}$ vu en (c)) et $u$ solution de $Z^3 = 1$, c'est-à-dire $z_0$, $z_1$ et $z_2$ comme vu en (a). Il s'ensuit que les solutions sont $2+\boldsymbol{i}$, $(2+\boldsymbol{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)$, et $(2+\boldsymbol{i})\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)$ ou encore $2+\boldsymbol{i}$, $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\boldsymbol{i}$, et $\frac{\sqrt{3}-2}{2}+\frac{2\sqrt{3}+1}{2}\boldsymbol{i}$.

Question 10. *Soit le système*

$$\begin{cases} x+y+\lambda z = 0 \\ \lambda x + (\lambda+1)y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 2\lambda \end{cases}$$

*où $\lambda$ est un paramètre réel.*

*(a) Dites pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda$ le système possède une solution unique.*

*(b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du sytème. Le système possède une solution unique si et seulement si $\text{dét}A \neq 0$. Or

$$\begin{aligned} \text{dét}A &= \lambda+1+\lambda^2+\lambda^2-\left(\lambda^2(\lambda+1)+\lambda+\lambda\right) \qquad \text{(par la règle de Sarrus)} \\ &= \lambda+1+2\lambda^2-\lambda^3-\lambda^2-2\lambda \\ &= -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 \\ &= \lambda^2(-\lambda+1)+(-\lambda+1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

On a donc $\text{dét}A \neq 0$ si et seulement si $\lambda \neq 1$. Le système possède donc une solution unique si et seulement si $\lambda \neq 1$.

(b) Nous allons distinguer les cas $\lambda \neq 1$ et $\lambda = 1$.

- Si $\lambda \neq 1$, le système a une solution unique donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ 2\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{2\lambda^2+\lambda^2-\big(2\lambda^2(\lambda+1)+\lambda\big)}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{3\lambda^2-2\lambda^3-2\lambda^2-\lambda}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)}$$
$$= \frac{-2\lambda^3+\lambda^2-\lambda}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{-\lambda(2\lambda^2-\lambda+1)}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{\lambda+2\lambda^3-(\lambda^3+2\lambda^2+0)}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{\lambda^3-2\lambda^2+\lambda}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)}$$
$$= \frac{\lambda(\lambda^2-2\lambda+1)}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{-\lambda(\lambda-1)^2}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{-\lambda(\lambda-1)}{\lambda^2+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{2\lambda(\lambda+1)+\lambda^2-(\lambda+2\lambda^2)}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)} = \frac{2\lambda^2+2\lambda+\lambda^2-\lambda-2\lambda}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)}$$
$$= \frac{\lambda^2+\lambda}{(1-\lambda)(\lambda^2+1)}$$

- Si $\lambda = 1$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x+y+z=0 & (4) \\ x+2y+z=1 & (5) \\ x+y+z=2 & (6) \end{cases}$$

Au vu des équations (4) et (6), le système est impossible. L'ensemble des solutions est donc $\varnothing$.

## Question 11.

(a) *Calculez* $\displaystyle\sum_{m=1}^{k} 2^{m-1}$

(b) *Soit la matrice* $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. *Montrez par récurrence que, pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(c) *Calculez* $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} M^n$.

(a) $\sum_{m=1}^{k} 2^{m-1} = \sum_{n=0}^{k-1} 2^n = 2^k - 1$ (par la formule $\sum_{n=0}^{t} z^n = \frac{z^{t+1}-1}{z-1}$).

(b) CAS DE BASE : $n = 1$. Dans ce cas, le premier membre est $M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le second membre est $\begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les deux membres sont donc égaux.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE : on suppose que la propriété (7) est démontrée pour tout $n$ tel que $1 \leqslant n \leqslant \ell$.
Montrons-la pour $n = \ell + 1$, c'est-à-dire

$$M^{\ell+1} = \begin{pmatrix} 2^\ell & 2^\ell \\ 2^\ell & 2^\ell \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
M^{\ell+1} &= M^\ell \cdot M && \text{(Règle des exposants)} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{\ell-1} & 2^{\ell-1} \\ 2^{\ell-1} & 2^{\ell-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{\ell-1}+2^{\ell-1} & 2^{\ell-1}+2^{\ell-1} \\ 2^{\ell-1}+2^{\ell-1} & 2^{\ell-1}+2^{\ell-1} \end{pmatrix} && \text{(par définition du produit matriciel)} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{\ell-1} & 2\cdot 2^{\ell-1} \\ 2\cdot 2^{\ell-1} & 2\cdot 2^{\ell-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^\ell & 2^\ell \\ 2^\ell & 2^\ell \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) $\sum_{n=1}^{k} M^n = \sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. Par définition de l'addition de matrices, cette dernière somme se calcule composante par composante. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{k} M^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} & \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} \\ \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} & \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k - 1 & 2^k - 1 \\ 2^k - 1 & 2^k - 1 \end{pmatrix}$$

où la dernière égalité découle du point (a).

Question 12. *Calculez la dérivée de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} + \operatorname{arctg}(q/x)$ *où* $p$ *et* $q$ *sont des paramètres réels.*

$$
\begin{aligned}
\partial_x\big(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} + \operatorname{arctg}(q/x)\big) &= \partial_x\big(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}}\big) + \partial_x\big(\operatorname{arctg}\frac{q}{x}\big) && \text{(dérivée d'une somme)}\\
&= \partial_y\ \mathrm{e}^y\Big|_{y=\sqrt{x^2+p}} \cdot \partial_x(\sqrt{x^2+p}) + \partial_z \operatorname{arctg} z\Big|_{z=q/x} \cdot \partial_x \frac{q}{x} && \text{(dérivées de fonctions composées)}\\
&= \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+p}} + \frac{1}{1+(q/x)^2} \cdot \frac{-q}{x^2} && \text{(dérivées de fonctions élémentaires)}\\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+p}}\, \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} - \frac{q}{x^2+q^2}
\end{aligned}
$$