Mathématique Élémentaire

Examen (12 janvier 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /2

- $(4-\boldsymbol{i})^{-1}$
- $\dfrac{2-3\boldsymbol{i}}{4-3\boldsymbol{i}}$
- $\overline{-12\boldsymbol{i}+40}$
- $\left|(2-\boldsymbol{i})^2\cdot(3+\boldsymbol{i})^4\right|$

Question 2. Calculez /4

- $\displaystyle\sum_{v=-1}^{t}(v+1)^2$
- $\displaystyle\sum_{s=1}^{\ell}\binom{\ell}{s}\frac{1}{2^s}$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(n+i-j)$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit le système /7

$$\begin{cases} x+\lambda y+z=2\lambda \\ x+y+\lambda z=0 \\ (\lambda+1)x+\lambda y+\lambda z=\lambda \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficents du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -2$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $\lambda = -2$.

(d) Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 4. Donnez la négation, en bon français, de la phrase suivante : /1

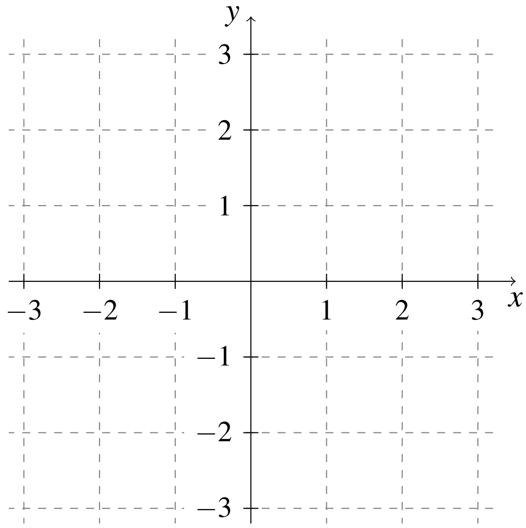
> Si je résous tous les exercices supplémentaires et que je les fais corriger par M^me^ Bridoux, alors je réussirai l'examen de Mathématique élémentaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Déterminez l'image de la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(e^t, e^{2t+1}\right)$. Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs. Tracez $\operatorname{Im}\gamma$ sur le graphe ci-dessous. Expliquez votre démarche. $/8$



Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(1,-3,5)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs. $/4$

Nom :

Prénom :

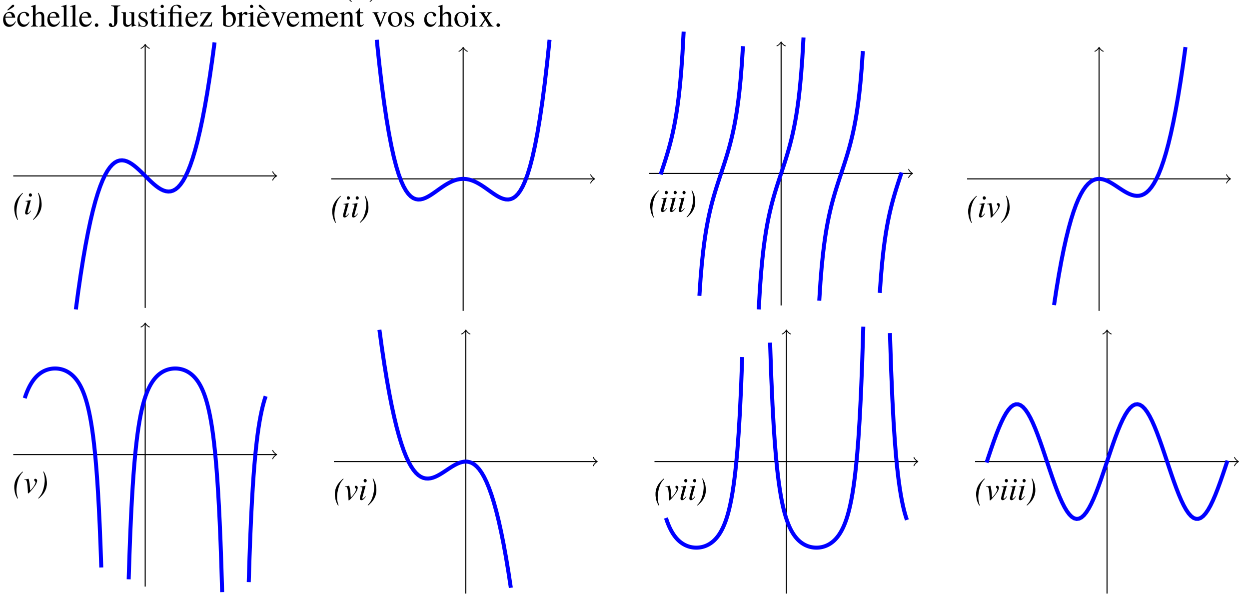
Section :

Question 7. Écrivez le domaine de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{x(x-2)}} + 1}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). /6

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8. Parmi les graphes ci dessous, repérez ceux des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin(x)} - 2$. Il n'y a aucune garantie que tous les graphes soient à la même échelle. Justifiez brièvement vos choix. /4



Nom :

Prénom :

Section :

/8

Question 9. Considérons les ensembles

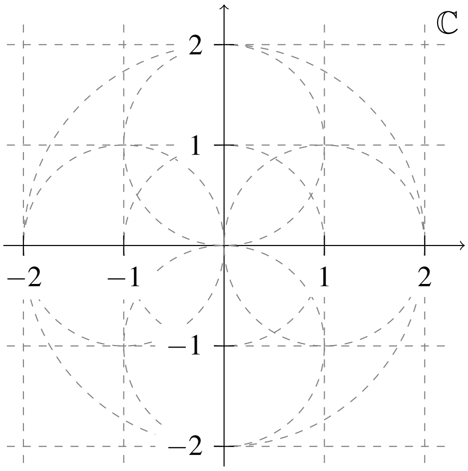
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \text{ est solution de l'équation } X^{12} = 1 \right\}$$
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \text{ est solution de l'équation } X^{4} = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

(a) Représentez l'ensemble A sur le graphique ci-contre.

(b) A-t-on $A \subseteq B$?

(c) A-t-on $B \subseteq A$?

Veillez à la qualité de vos justifications.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 10. Prouvez que /6

- $z = \bar{z}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

- $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, $|z^{-n}| = |z|^{-n}$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/12

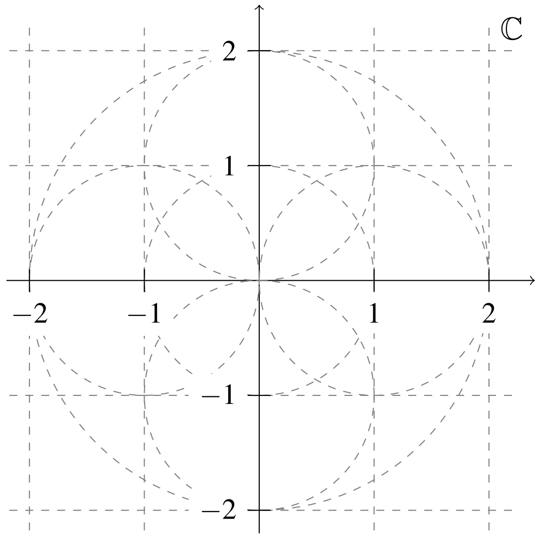
Question 11.

(a) Donnez, sous forme trigonométrique, les nombres complexes $z_n = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

(b) Représentez ces nombres z_n dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre) et *prouvez* une formule explicite pour la forme de z_n en fonction de n mod 8.

(c) Montrez que $3 - \boldsymbol{i}$ est solution de l'équation $Z^4 = 28 - 96\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez toutes les solutions complexes, sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, de l'équation $Z^4 = 28 - 96\boldsymbol{i}$.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 12. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $A_{ij} = (\pi i - \pi j)^3 \cdot (i^2 - j^2)^2$. $/4$

(a) Montrez que A est antisymétrique.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13.

/7

(a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \tag{1}$$

(b) Déduisez du point précédent la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.