Mathématique Élémentaire

Examen (10 juin 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez $/4$

- $\displaystyle\sum_{v=1}^{t}\sum_{p=1}^{v}(p-v+t^2) =$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell}\binom{\ell}{j}2^j =$
- $\displaystyle\sum_{i=n+2}^{s} 1 =$

Question 2. Calculez $/2$

- $\overline{-7\boldsymbol{i}-5} =$
- $|1-2\boldsymbol{i}| =$
- $|\boldsymbol{i}-3| =$
- $|(1-2\boldsymbol{i})^2(\boldsymbol{i}-3)^4| =$
- $\dfrac{5-2\boldsymbol{i}}{3-4\boldsymbol{i}} =$

Mathématique Élémentaire

Examen (10 juin 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

/12

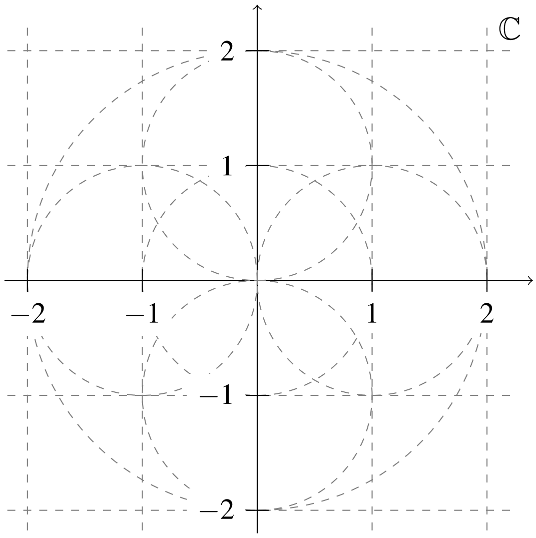
Question 3.

(a) Donnez, sous forme trigonométrique, les nombres complexes $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prouvez une formule explicite pour la forme de z_n en fonction de n mod 3. Représentez ces nombres z_n dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre).

(c) Montrez que $2 - \boldsymbol{i}$ est solution de l'équation $Z^3 = 2 - 11\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez toutes les solutions complexes, sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, de l'équation $Z^3 = 2 - 11\boldsymbol{i}$.



Mathématique Élémentaire

Examen (10 juin 2009)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Prouvez que

/6

- $\bar{z}$ est l'inverse de z si et seulement si $|z| = 1$.

- $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, $\bar{z}^{-n} = \overline{z^{-n}}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

/7

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}$.

(b) Montrez que $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n} = 0$.

Mathématique Élémentaire

Examen (10 juin 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6.

/3

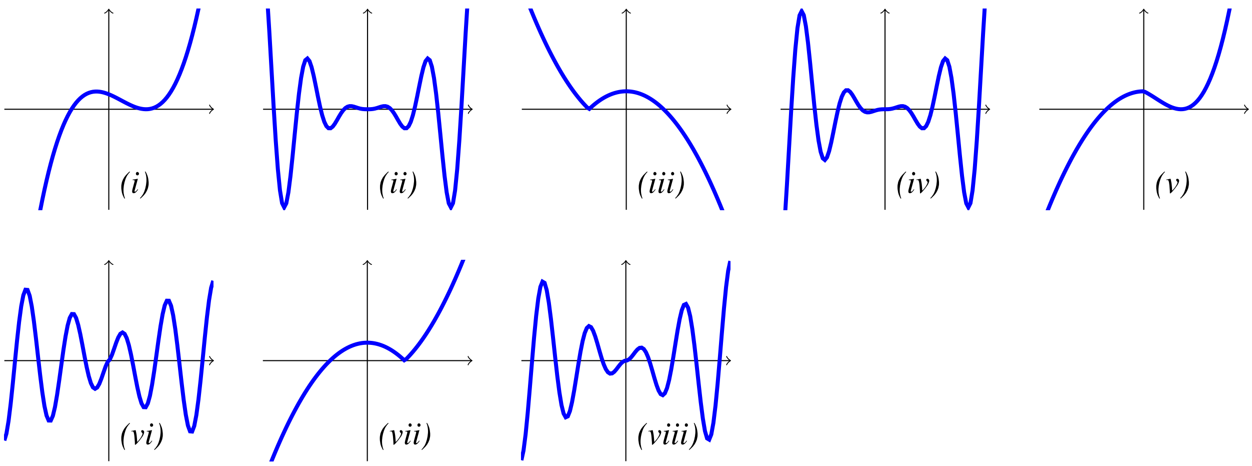
(a) La proposition $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \Rightarrow B$ est-elle une tautologie ?

(b) Donnez, en bon français, la négation de la phrase suivante : « Si je rate l'examen de Mathématique élémentaire, alors j'aurai aussi raté l'examen d'Analyse ».

Question 7.

/4

Parmi les graphes ci dessous, repérez ceux des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \sin x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x-5|(x+5)$. Il n'y a aucune garantie que les axes et les différents graphes soient à la même échelle. Justifiez brièvement vos choix.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Soient les matrices

/4

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ ab & 0 & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ca & b & c^2 \end{pmatrix}.$$

Calculez AB, $\text{dét}\, C$ et $\text{dét}(DE)$.

Mathématique Élémentaire

Examen (10 juin 2009)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Écrivez une équation cartésienne pour l'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \big(\sin s, \sin(2s)\big)$:

$$(x, y) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{équation en } (x,y)}$$

Détaillez vos calculs et expliquez vos raisonnements.

/5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soient les ensembles /8

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| (x,y,z) \text{ est un vecteur simultanément orthogonal aux vecteurs } (-1,3,-2) \text{ et } (1,-4,-1)\big\},$$

$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| (x,y,z) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x}{13} = \frac{y+2}{3} = z-1\big\}.$$

(a) A-t-on

- $(0,0,0) \in A$?

  Oui/non car ....

  ....

- $\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{13}, \frac{\sqrt{2}}{13}\right) \in A$?

  Oui/non car ....

  ....

- $\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{13}, \frac{\sqrt{2}}{13}\right) \in B$?

  Oui/non car ....

  ....

(b) Décrivez géométriquement l'ensemble A.

(c) A-t-on $A \subseteq B$?

(d) A-t-on $B \subseteq A$?

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $A_{ij} = (42i^2 - 42j^2)^3 \cdot (i+j)^2$. /4

(a) Montrez que A est antisymétrique.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$. Expliquez votre démarche.

Mathématique Élémentaire

Examen (10 juin 2009)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Prouvez de manière graphique et algébrique que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, /5

$$\text{si } |x| \leqslant |x+1| \text{ et } |x| \leqslant |x-1|, \text{ alors } |x| \leqslant 1/2.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. Soit le système

/7

$$\begin{cases} (m+1)x+my+mz=m \\ x+my+z=2m \\ x+y+mz=0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m=-3$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $m=-3$.

(d) Résolvez le système en fonction de m uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.