

Mathématique Élémentaire

Examen

(19 août 2009)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

- $|-1 - 2i| =$
- $\frac{5 - 2i}{3 - 4i} =$
- $|i - 3| =$
- $\overline{-7i + 5} =$
- $|(1 + 2i)^7(i - 3)^4|^2 =$

/2

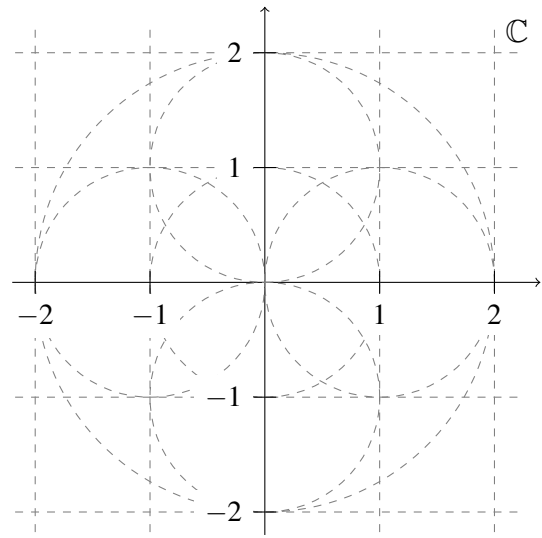
Question 2. Calculez

- $\sum_{k=1}^t \binom{t}{k} 2^k =$
- $\sum_{v=1}^t \sum_{p=1}^t (p^2 - v^2 + t^3) =$
- pour $s > n + 8$, $\sum_{v=n+8}^s 8 =$

/4

Question 3.

- (a) Donnez, sous forme trigonométrique, les nombres complexes $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Prouvez une formule explicite pour la forme de z_n en fonction de $n \bmod 3$. Représentez ces nombres z_n dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre).
- (c) Montrez que $2 - i$ est solution de l'équation $Z^3 = 2 - 11i$.
- (d) Donnez toutes les solutions complexes, sous la forme $a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, de l'équation $Z^3 = 2 - 11i$.



Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Prouvez que

■ $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$ à partir de la définition de l'inverse.

■ \bar{z} est l'inverse de z si et seulement si $|z| = 1$.

■ Pour tout $n \geq 1$, $\bar{z}^{-n} = \overline{z^{-n}}$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/7

Question 5.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 - z) \sum_{k=0}^n z^k = 1 - z^{n+1}$.

(b) Calculez $\sum_{k=0}^{n-1} \text{cis} \frac{2k\pi}{n}$. Expliquez votre démarche.

Question 6.

/3

(a) La proposition $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \Rightarrow C$ est-elle une tautologie ?

(b) Donnez, en bon français, la négation de la phrase suivante : « Si je rate l'examen de Mathématique élémentaire, alors j'aurai aussi raté l'examen d'Analyse ».

Question 7. Calculez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{e^{x^2+y}} + \arctg(x^2 + \text{tg}(xy^2))$ où y est un paramètre réel.

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/4

Question 8. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = (\sqrt{2} \quad -2 \quad 5), \quad C = ((-1)^{i+j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ ab & 0 & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ca & b & c^2 \end{pmatrix}.$$

Calculez BA , $\det C$ et $\det(CED)$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/5

Question 9. Écrivez une équation cartésienne pour l'image de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto (\sin s, \sin(2s))$:

$$(x,y) \in \text{Im } f \Leftrightarrow \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{équation en } (x,y)}$$

Détaillez vos calculs et expliquez vos raisonnements.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10. Soient les ensembles

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \text{ est un vecteur simultanément orthogonal aux vecteurs } (-1, 3, -2) \text{ et } (1, -4, -1)\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x}{13} = \frac{y+2}{3} = z-1\}.$$

(a) A-t-on

- $(1, 2, -1) \in A$?

Oui/non car

.....

- $(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{13}, \frac{\sqrt{2}}{13}) \in A$?

Oui/non car

.....

- $(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{13}, \frac{\sqrt{2}}{13}) \in B$?

Oui/non car

.....

(b) Décrivez géométriquement l'ensemble A.

(c) A-t-on $A \subseteq B$?

(d) A-t-on $B \subseteq A$?

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $A_{ij} = (2009i^2 - 2009j^2)^5 \cdot (i + j)^2$.

(a) Montrez que A est antisymétrique.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$. Expliquez votre démarche.

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 12. Prouvez de manière graphique et algébrique que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

si $|x| \leq |x + 2|$ et $|x| \leq |x - 2|$, alors $|x| \leq 1$.

/5

Question 13. Soit le système

$$\begin{cases} (m+1)x + my + mz = m \\ x + my + z = 2m \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système possède-t-il une solution unique ?
- (b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m = -5$.
- (c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $m = -5$.
- (d) Résolvez le système en fonction de m uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

/7

Mathématique Élémentaire

Examen

(19 août 2009)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 13 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.