Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (22 septembre 2008) **Correction**

Question 1. *Calculer*

- $(3+2\sqrt{2}\boldsymbol{i})\cdot(1-\sqrt{2}\boldsymbol{i}) = (3\cdot 1 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\boldsymbol{i}^2) + \boldsymbol{i}\big(3\cdot(-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\cdot 1\big)$
  $= (3+4) + \boldsymbol{i}\sqrt{2}(2-3) = 7 - \boldsymbol{i}\sqrt{2}$
- $(2-\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i}) = 2^2 - \boldsymbol{i}^2 = 4+1 = 5$
- $|2-\boldsymbol{i}|^2 = (2-\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i}) = 5$ (formule vue au cours : $|a+b\boldsymbol{i}|^2 = (a+b\boldsymbol{i})(a-b\boldsymbol{i})$).
- $\overline{3+2\boldsymbol{i}} = 3-2\boldsymbol{i}$
- $|2-\boldsymbol{i}|^6 = \big(|2-\boldsymbol{i}|^2\big)^3 = 5^3 = 125$
- $|2-\boldsymbol{i}|^9 = \big(|2-\boldsymbol{i}|^2\big)^4 |2-\boldsymbol{i}| = 5^4\sqrt{5} = 625\sqrt{5}$

Question 2. *Prouvez que, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.*

On sait que z_1 est de la forme $a+b\boldsymbol{i}$ et z_2 de la forme $c+d\boldsymbol{i}$. On a

$$\begin{aligned}\overline{z_1\cdot z_2} &= \overline{(a+b\boldsymbol{i})(c+d\boldsymbol{i})} = \overline{ac-bd+\boldsymbol{i}(ad+bc)} = ac-bd-\boldsymbol{i}(ad+bc)\\ \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= (a-b\boldsymbol{i})(c-d\boldsymbol{i}) = (ac-bd)-\boldsymbol{i}(ad+bc)\end{aligned}$$

ce qui est l'égalité demandée.

Question 3. *Soit $a \neq 0$. Soit y solution de l'équation $Y^2 = b^2-4ac$. Prouvez que $x := \dfrac{-b+y}{2a}$ est solution de $aX^2+bX+c=0$.*

x est solution de $aX^2+bX+c=0$ si et seulement si $ax^2+bx+c=0$. Vu la définition de x, cela revient à tester que

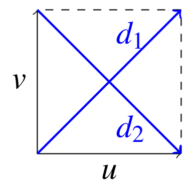
$$a\Big(\frac{-b+y}{2a}\Big)^2 + b\Big(\frac{-b+y}{2a}\Big) + c = 0. \tag{1}$$

Le premier membre de (1) est égal à

$$\begin{aligned} a\,\frac{b^2-2by+y^2}{4a^2} + \frac{-b^2+by}{2a} + c &= \frac{b^2-2by+y^2-2b^2+2by+4ac}{4a}\\ &= \frac{-b^2+4ac+y^2}{4a} = \frac{0}{4a} = 0\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité résulte de l'hypothèse disant que y est solution de $Y^2 = b^2-4ac$.

Question 4. *Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ de même longueur. Considérons le carré représenté ci-contre construit sur les vecteurs u et v. Notons d_1 et d_2 les vecteurs diagonaux de ce carré. Montrez que d_1 et d_2 sont perpendiculaires. Expliquez votre raisonnement et citez tous les résultats que vous utilisez.*



Remarquons que $\|u\| = \|v\|$ (c'est pourquoi on a un carré). On a $d_1 = u + v$ et $d_2 = u - v$ (voir le dessin où on a utilisé la règle du parallélogramme pour additionner les vecteurs). Pour montrer que les diagonales sont perpendiculaires, montrons que $(d_1|d_2) = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
(d_1|d_2) &= (u+v|u-v) \\
&= (u|u-v) + (v|u-v) && \text{(par la propriété } \forall x,y,z \in \mathbb{R}^N, \\
& && \quad (x+y|z) = (x|z) + (y|z)) \\
&= (u|u) + (u|-v) + (v|u) + (v|-v) && \text{(par la propriété } \forall x,y,z \in \mathbb{R}^N, \\
& && \quad (x|y+z) = (x|y) + (x|z)) \\
&= (u|u) - (u|v) + (u|v) - (v|v) && \text{(car } \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x,y \in \mathbb{R}^N,\ (\lambda x|y) = \lambda(x|y) = (x|\lambda y) \\
& && \text{ et le produit scalaire est commutatif)} \\
&= \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0
\end{aligned}$$

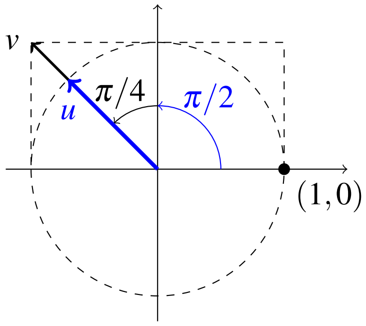
Question 5. *Soient les vecteurs $u = (1, -2, 5)$ et $v = (2, 0, -8)$. Calculez*

- $(u|v) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-8)$ (par définition du produit scalaire)
  $= 2 - 40 = -38$

- $\left\| \dfrac{u}{\|v\|} \right\| = \dfrac{1}{\|v\|} \cdot \|u\|$ car $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$ et ici $\lambda = \dfrac{1}{\|v\|} \geqslant 0$. Comme $\|v\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-8)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$ et $\|u\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$, on a $\big\|u/\|v\|\big\| = \sqrt{30}/\sqrt{68}$.

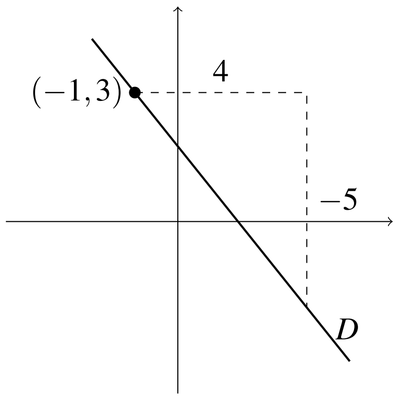
- *la distance entre u et v.*
  $\operatorname{dist}(u, v) = \sqrt{(2-1)^2 + (0+2)^2 + (-8-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 169} = \sqrt{174}$

Question 6. *Donnez les composantes du vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ représenté sur le dessin ci-dessous. Expliquez votre raisonnement.*



À partir des réflexions menées sur les vecteurs au cours, voici un type de solution possible.
On sait que $u = v/\|v\|$ (vu au cours). Donc $v = \|v\|\,u$. Or $\|v\| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ et u est sur le cercle trigonométrique. Donc u est de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour un certain $\theta \in [0, 2\pi[$. Ici $\theta = \pi/4 + \pi/2 = 3\pi/4$. Donc $v = \sqrt{2}\big(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\big) = \sqrt{2}\big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\big) = (-1, 1)$.

Question 7.



(a) *Soit D la droite représentée ci-contre. Donnez une équation cartésienne de D. Expliquez votre raisonnement.*

(b) *Soit la droite $D \equiv (x,y) = (3,-4) + \lambda(-2,7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Recherchez deux points de D. Expliquez votre raisonnement.*

(c) *Soit la droite $D \equiv 5x - 3y = 1 + 4x - 7y$. Donnez une équation paramétrique de D. Expliquez votre raisonnement.*

(a) Un vecteur directeur de D se lit sur le dessin : $(4, -5)$. Donc $(5, 4)$ est un vecteur normal de D car $\big((5,4) \mid (4,-5)\big) = 20 - 20 = 0$. Donc $D \equiv 5x + 4y = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Pour trouver c, exprimons que $(-1, 3) \in D$: $5(-1) + 4 \cdot 3 = c$, d'où $c = 7$. Donc $D \equiv 5x + 4y = 7$.

(b) Un point (x, y) de D est de la forme $(3,-4) + \lambda(-2,7)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de donner une valeur à λ pour avoir un point de D. Si on prend $\lambda = 0$, on obtient $(3,-4) \in D$. Si $\lambda = 1$, on a $(3,-4) + (-2,7) = (1,3) \in D$.

(c) L'équation de D s'écrit $x + 4y = 1$. Donc $(1, 4)$ est un vecteur normal de D et, par conséquent, $(-4, 1)$ est un vecteur directeur de D car $\big((1,4) \mid (-4,1)\big) = -4 + 4 = 0$. On a aussi besoin d'un point de D : si $y = 0$, alors $x = 1$. Donc $(1, 0) \in D$. En conclusion, une équation paramétrique de D est $D \equiv (x,y) = (1,0) + \lambda(-4,1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 8.

(a) *Soit $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Complétez les phrases suivantes :*

$v = 0$ *si et seulement si* $\boxed{v_1 = 0 \text{ et } v_2 = 0 \text{ et} \ldots \text{ et } v_N = 0}$

$v \neq 0$ *si et seulement si* $\boxed{v_1 \neq 0 \text{ ou } v_2 \neq 0 \text{ ou} \ldots \text{ou } v_N \neq 0}$

(b) *Soit $u \in \mathbb{R}^3$ le vecteur défini par*

$$u := \left(\lambda^3 - \lambda^2,\ \lambda^2 + \lambda - 2,\ \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}\right).$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ a-t-on $u = 0$? Expliquez votre raisonnement.

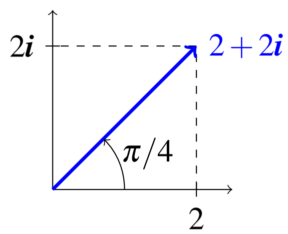
Par (a), on a $u = 0$ si et seulement si $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ et $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ et $\frac{\lambda-1}{\lambda-2} = 0$.

- $\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) = 0$ a pour solutions $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.
- $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ a pour solutions $\lambda = 1$ et $\lambda = -2$ (par la formule usuelle).
- $\frac{\lambda-1}{\lambda-2} = 0$ a pour solution $\lambda = 1$ (et exclu $\lambda = 2$).

Les trois équations sont simultanément vérifiées lorsque $\lambda = 1$. Donc $u = 0$ si et seulement si $\lambda = 1$.

REMARQUE : Comme il est nécessaire de vérifier les trois équations, on pouvait alternativement uniquement considérer les solutions $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ de la première et de voir (par substitution) lesquelles satisfont les deux équations suivantes.

Question 9. *Représentez $z = 2 + 2\boldsymbol{i}$ dans le plan, calculez $|2 + 2\boldsymbol{i}|$ et $\operatorname{Arg}(2 + 2\boldsymbol{i})$.*



$|2 + 2\boldsymbol{i}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
$\operatorname{Arg}(2 + 2\boldsymbol{i}) = \pi/4$

Question 10. *Résoudre les équations*

(a) $X^2 - 4X - 5 = 0$

(b) $X^2 + 4X + 5 = 0$

(a) L'équation auxiliaire est $Y^2 = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$. Les solutions sont $y_1 = 6$ et $y_2 = -6$. Par conséquent (voir la formule de la question 3) : $x_1 = \frac{4+6}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{4-6}{2} = -1$ sont les solutions de $X^2 - 4X - 5 = 0$.

(b) L'équation auxiliaire est $Y^2 = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$. Les solutions sont $y_1 = 2\boldsymbol{i}$ et $y_2 = -2\boldsymbol{i}$. Par conséquent (voir la formule de la question 3) : $x_1 = \frac{-4+2\boldsymbol{i}}{2} = -2 + \boldsymbol{i}$ et $x_2 = \frac{-4-2\boldsymbol{i}}{2} = -2 - \boldsymbol{i}$ sont les solutions de $X^2 + 4X + 5 = 0$.

Question 11. *Donnez une règle pour calculer* $\boldsymbol{i}^n$*,* $n \geqslant 0$*. Expliquez comment vous avez obtenu cette règle.*

On a que n peut s'écrire, grâce à la division entière par 4, $n = q \cdot 4 + r$ où $q, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r \leqslant 3$. Par conséquent $\boldsymbol{i}^n = \boldsymbol{i}^{q4+r} = (\boldsymbol{i}^4)^q \cdot \boldsymbol{i}^r = 1^q \cdot \boldsymbol{i}^r = \boldsymbol{i}^r$ (car $\boldsymbol{i}^4 = (\boldsymbol{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1$). Donc $\boldsymbol{i}^n$ ne prend que quatre valeurs (à savoir $\boldsymbol{i}^0 = 1$, $\boldsymbol{i}^1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}^2 = -1$ et $\boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$) suivant la valeur du reste r.