Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (29 septembre 2008) **Correction**

Question 1. *Résoudre $X^2 = -\boldsymbol{i}$ dans $\mathbb{C}$.*

1RE SOLUTION : On a que les solutions de $X^2 = -\boldsymbol{i}$ sont produit des solutions de $X^2 = \boldsymbol{i}$ et $X^2 = -1$. On sait que les solutions complexes de $X^2 = \boldsymbol{i}$ sont $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$ (vu au cours), les solutions de $X^2 = -1$ sont $\boldsymbol{i}$ et $-\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$. Donc les solutions de $X^2 = -\boldsymbol{i}$ sont $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ et $\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ (les deux autres produits n'apportent pas de nouvelles solutions vu qu'on a déjà deux solutions distinctes).
2E SOLUTION : $-\boldsymbol{i} = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$. Donc une solution de $X^2 = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$ est $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ puisque $(\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4})^2 = \operatorname{cis}(2\,\frac{3\pi}{4}) = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$. L'autre solution est $-\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ (car si x est solution de $X^2 = z$, alors $-x$ est aussi solution de $X^2 = z$).

Question 2. *Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :*

- $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{i} = 1 \cdot \operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{6} = \operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{6}$
- $$\begin{aligned} \sin 45^\circ + \boldsymbol{i}\cos 45^\circ &= \sin\tfrac{\pi}{4} + \boldsymbol{i}\cos\tfrac{\pi}{4} \quad (\text{car } \pi/4 = 45^\circ) \\ &= \cos\tfrac{\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\tfrac{\pi}{4} \\ &= \operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$
- $\operatorname{cis}\left(\dfrac{23\pi}{7}\right) = \operatorname{cis}\left(\dfrac{23\pi}{7} \bmod 2\pi\right) = \operatorname{cis}\left(\dfrac{9\pi}{7}\right)$ car $\frac{23}{7}\pi - 2\pi = \frac{9}{7}\pi$ et $0 \leqslant \frac{9}{7}\pi < 2\pi$.

Question 3. *Résolvez algébriquement l'inéquation suivante :*

$$\frac{(1-|x|)^2}{x} \leqslant x \qquad (1)$$

L'ensemble des x vérifiant (1) *doit être exprimé sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y a d'intervalles, mieux c'est). Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs.*

Pour commencer, remarquons que l'inéquation (1) n'a de sens que pour $x \neq 0$. On veut multiplier les deux membres de l'inégalité par x ; il faut donc distinguer deux cas.
$\underline{x > 0}$: L'équation (1) devient

$$(1-|x|)^2 \leqslant x^2$$

Comme $x > 0$, $|x| = x$. En développant les carrés, on obtient $1 - 2x + x^2 \leqslant x^2$, c'est-à-dire $x \geqslant 1/2$. L'ensemble des $x > 0$ satisfaisant (1) est donc $[1/2, +\infty[$.

<u>$x < 0$</u> : L'équation (1) devient
$$(1 - |x|)^2 \geqslant x^2$$
Comme ici $x > 0$, $|x| = -x$. En développant les carrés, on obtient $1 + 2x + x^2 \geqslant x^2$, c'est-à-dire $x \geqslant -1/2$. Par conséquent, l'ensemble des $x < 0$ qui satisfont (1) est $[-1/2, 0[$.

En mettant les deux cas ensemble, on obtient que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation est $[-1/2, 0[\cup [1/2, +\infty[$.

Question 4. *Soit la droite D passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) où $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ et $x_1 \neq x_2$ (il n'est par contre pas exclu que $y_1 = y_2$).*

- *Donnez une équation paramétrique et une équation cartésienne de D. Expliquez votre démarche.*

  Le vecteur joignant les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est un vecteur directeur de D. Ses composantes sont $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Une équation paramétrique de D est donc $(x, y) = (x_1, y_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Un vecteur normal de D est $(y_1 - y_2, x_2 - x_1)$ car
  $$\big((y_1 - y_2, x_2 - x_1) \mid (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\big) = y_1x_2 - y_1x_1 - y_2x_2 + y_2x_1 + x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = 0$$
  Donc une équation cartésienne de D est de la forme $(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = c$. Comme $(x_1, y_1) \in D$, on a : $c = (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 = x_2y_1 - x_1y_2$. Donc $D \equiv (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2$.

- *Donnez, en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2, les coordonnées du point d'intersection entre D et l'axe des y. Expliquez.*

  Le point d'intersection est de la forme $(0, y^*)$ où $y^* \in \mathbb{R}$. Remplaçons x par 0 et y par y^* dans l'équation cartésienne de D :
  $$(y_1 - y_2) \cdot 0 + (x_2 - x_1)y^* = x_2y_1 - x_1y_2$$
  c'est-à-dire
  $$y^* = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$
  Le point est donc $\left(0, \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}\right)$. Remarquons que si $y_1 = y_2$ alors $y^* = y_1$ et le point d'intersection est $(0, y_1)$.

Question 5. *Donnez, en bon français, la contraposée de « Si je rate ce test alors je rate les examens de janvier ».*

Il s'agit d'une proposition de la forme $P \Rightarrow Q$ où P est « je rate ce test » et Q est « je rate les examens de janvier ». La contraposée est $\neg Q \Rightarrow \neg P$, ce qui donne « Si je ne rate pas les examens de janvier, alors je ne rate pas ce test », c'est-à-dire « Si je réussi les examens de janvier, alors je réussi ce test ».

Question 6. *Soit le système*

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = \pi^2 \\ x\sin\theta + y\cos\theta = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

où les inconnues sont x, y et θ est un paramètre réel. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de θ ce système possède une unique solution. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

On a vu qu'un système possède une unique solution si et seulement si le déterminant est non nul. Calculons donc le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

En conclusion, le déterminant est toujours différent de 0 ; le système a donc une unique solution quelle que soit la valeur de θ.

Question 7. *Donnez la table de vérité de $p := (A \vee B) \wedge C \Rightarrow \neg(A \wedge B)$. Est-ce une tautologie ?*

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$\neg(A \wedge B)$	p
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

Ce n'est pas une tautologie. C'en serait une si la valeur de vérité de p était toujours 1 (ici p est faux si A et B et C sont vrais).

Question 8. *Dans chacune des situations suivantes, donnez l'ensemble S qui décrit l'intersection des droites D_1 et D_2 :*

(a) $D_1 \equiv 2x + y = 5$ *et* $D_2 \equiv (x,y) = (-3,-1) + \lambda(1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *;*

Un vecteur normal de D_1 est $(2,1)$. Un vecteur directeur de D_1 est donc $(1,-2)$ car $\big((2,1) \mid (-1,2)\big) = -2+2 = 0$. Les vecteurs $(1,-2)$ et $(1,1)$ n'étant pas multiples l'un de l'autre, les deux droites sont sécantes. De l'équation de D_2 on a : $(x,y) = (-3+\lambda, -1+\lambda)$ pour un certain λ. Regardons pour quelle valeur de λ le point $(-3+\lambda, -1+\lambda)$ appartient à D_1 :

$$2(-3+\lambda) + (-1+\lambda) = 5 \quad \text{d'où} \quad 3\lambda = 12 \quad \text{d'où} \quad \lambda = 4.$$

On a donc $S = \{(-3+4, -1+4)\} = \{(1,3)\}$.

(b) $D_1 \equiv -2x+3y=1$ *et* $D_2 \equiv 0{,}2x-0{,}3y=0{,}1$ *;*

Dans l'équation de D_1, posons $a=-2$, $b=3$, $c=1$ et dans l'équation de D_2, posons $a'=0{,}2$, $b'=-0{,}3$ et $c=0{,}1$. Étudions la proportionnalité des coefficients :

$$\frac{a}{a'}=\frac{-2}{0{,}2}=-10,\quad \frac{b}{b'}=\frac{3}{-0{,}3}=-10\quad \text{mais}\quad \frac{c}{c'}=\frac{1}{0{,}1}=10.$$

Comme la proportionnalité n'est pas respectée par les termes indépendants, on en déduit que les droites sont parallèles distinctes. Donc $S=\varnothing$.

(c) $D_1 \equiv (x,y)=(-1,3)+\lambda(2,1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ *et* $D_2 \equiv (x,y)=(-7,0)+\mu(-4,-2)$, $\mu\in\mathbb{R}$.

1^{RE} MÉTHODE : L'équation de D_1 s'écrit $(x,y)=(-1+2\lambda,3+\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et celle de D_2 s'écrit $(x,y)=(-7-4\mu,-2\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$. Regardons si on peut trouver $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $(-1+2\lambda,3+\lambda)=(-7-4\mu,-2\mu)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases}-1+2\lambda=-7-4\mu\\ 3+\lambda=-2\mu\end{cases}\tag{2}$$

En substituant μ donné par la seconde équation dans la première, on a $-1+2\lambda=-7+2(-2\mu)=-7+6+2\lambda$, c'est-à-dire $-1=-1$ ce qui est toujours vrai quel que soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Le système (2) est donc satisfait quels que soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Les deux droites sont donc confondues. On peut écrire $S=\{(-1+2\lambda,3+\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$.

2^E MÉTHODE : Un vecteur directeur de D_1 (resp. D_2) est $(2,1)$ (resp. $(-4,-2)$). Ces vecteurs sont multiples l'un de l'autre car $(-4,-2)=-2(2,1)$. Les deux droites sont donc soit parallèles distinctes, soit confondues. Si on montre qu'on point de D_2 appartient à D_1, on pourra déduire qu'elles sont confondues.

Montrons que $(-7,0)\in D_1$, c'est-à-dire qu'il existe un $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $(-7,0)=(-1,3)+\lambda(2,1)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases}-7=-1+2\lambda\\ 0=3+\lambda\end{cases}$$

De la seconde équation, on a $\lambda=-3$ et en remplaçant dans la première, on a $-7=-7$. En prenant $\lambda=-3$, on voit que $(-7,0)\in D_1$.

De l'équation de D_2, on a $x=-7-4\mu$ et $y=-2\mu$. Donc $x=-7+2y$. On peut donc écrire $S=\{(-7+2\alpha,\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

3^E MÉTHODE : On peut aussi réécrire une équation cartésienne de chaque droite et résoudre le système formé par ces deux équations.

Question 9. *Soit* $S = \{(\lambda, 3\lambda - 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ *l'ensemble des solutions d'un système de deux équations à deux inconnues.*

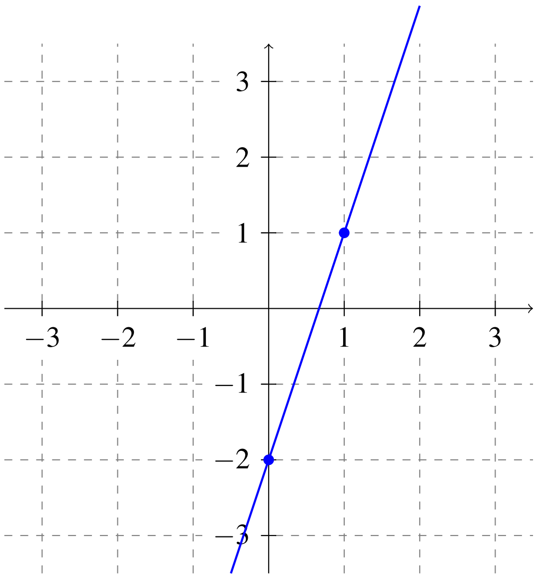
(a) *Les couples* $(1,1)$ *et* $(5,4)$ *sont-ils solutions de ce système ? Détaillez votre raisonnement.*

$(1,1)$ est solution si on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(1,1) = (\lambda, 3\lambda - 2)$ c'est-à-dire $1 = \lambda$ et $1 = 3\lambda - 2$. De la seconde équation, on déduit $3\lambda = 3$, c'est-à-dire $\lambda = 1$. Donc $(1,1)$ est solution du système. Par un raisonnement semblable, on montre qu'on ne peut trouver de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(5,4) = (\lambda, 3\lambda - 2)$ c'est-à-dire $\lambda = 5$ et $4 = 3\lambda - 2$. La seconde équation implique en effet $3\lambda = 6$, c'est-à-dire $\lambda = 2$. On en déduit que $(5,4)$ n'est pas solution du système.

(b) *Que vaut le déterminant de ce système ? Justifiez votre réponse.*

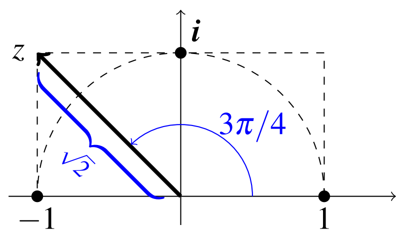
L'ensemble S est constitué d'une infinité de couples. On a vu au cours que les deux équations du système sont alors celles de deux droites confondues. Dans ce cas, le déterminant vaut 0.

(c) *Représentez l'ensemble S sur le dessin ci-dessous. Expliquez votre construction.*

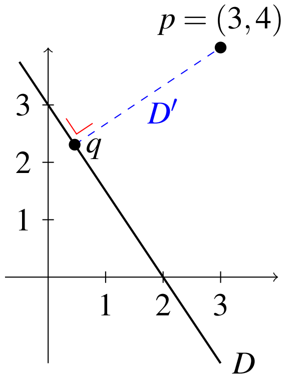


L'ensemble S décrit une droite. Lorsque $x = \lambda \in \mathbb{R}$, on a $y = 3x - 2$. C'est une équation cartésienne de la droite décrite par S. Elle passe par $(0, -2)$ et $(1,1)$.

Question 10. *Donnez la forme trigonométrique du complexe z représenté ci-contre.*



$$z = -1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{4}$$



Question 11. *Considérons la droite D ainsi que les points p et q représentés sur le dessin ci-contre.*

(a) *Recherchez les coordonnées de q. Expliquez votre raisonnement.*

(b) *Calculez la distance entre p et q.*

(a) Le point q est à l'intersection de la droite D et de la droite D' passant par p et perpendiculaire à D. Cherchons une équation cartésienne de ces deux droites.

- D passe par $(0,3)$ et $(2,0)$. Une équation cartésienne de D est donc

$$y-3 = \frac{-3}{2}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2y+3x = 6$$

- La pente de D vaut $-3/2$. La pente de D' vaut donc $2/3$ (deux droites perpendiculaires ont des pentes opposées et inverses). Donc $D' \equiv y = \frac{2}{3}x + p'$. On sait que $p = (3,4) \in D'$. Donc $4 = \frac{2}{3} \cdot 3 + p'$ c'est-à-dire $p' = 2$. Donc $D' \equiv y = \frac{2}{3}x + 2$ ou encore $D' \equiv 3y - 2x = 6$.

On trouve les coordonnées de q en résolvant le système formé par les équations de D et D' :

$$\begin{cases} 3x+2y = 6 & (3) \\ -2x+3y = 6 & (4) \end{cases}$$

En faisant $2 \cdot (3) + 3 \cdot (4)$, on a $13y = 30$, c'est-à-dire $y = 30/13$. Dans (3), on a $x = \frac{6-2y}{3} = 2 - \frac{2}{3}y = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{30}{13} = \frac{6}{13}$. Donc $q = \left(\frac{6}{13}, \frac{30}{13}\right)$.

(b) La distance entre p et q est donnée par

$$\sqrt{\left(3-\frac{6}{13}\right)^2 + \left(4-\frac{30}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{13^2}\left((39-6)^2+(52-30)^2\right)} = \frac{1}{13}\sqrt{33^2+22^2} = \frac{\sqrt{1573}}{13}$$